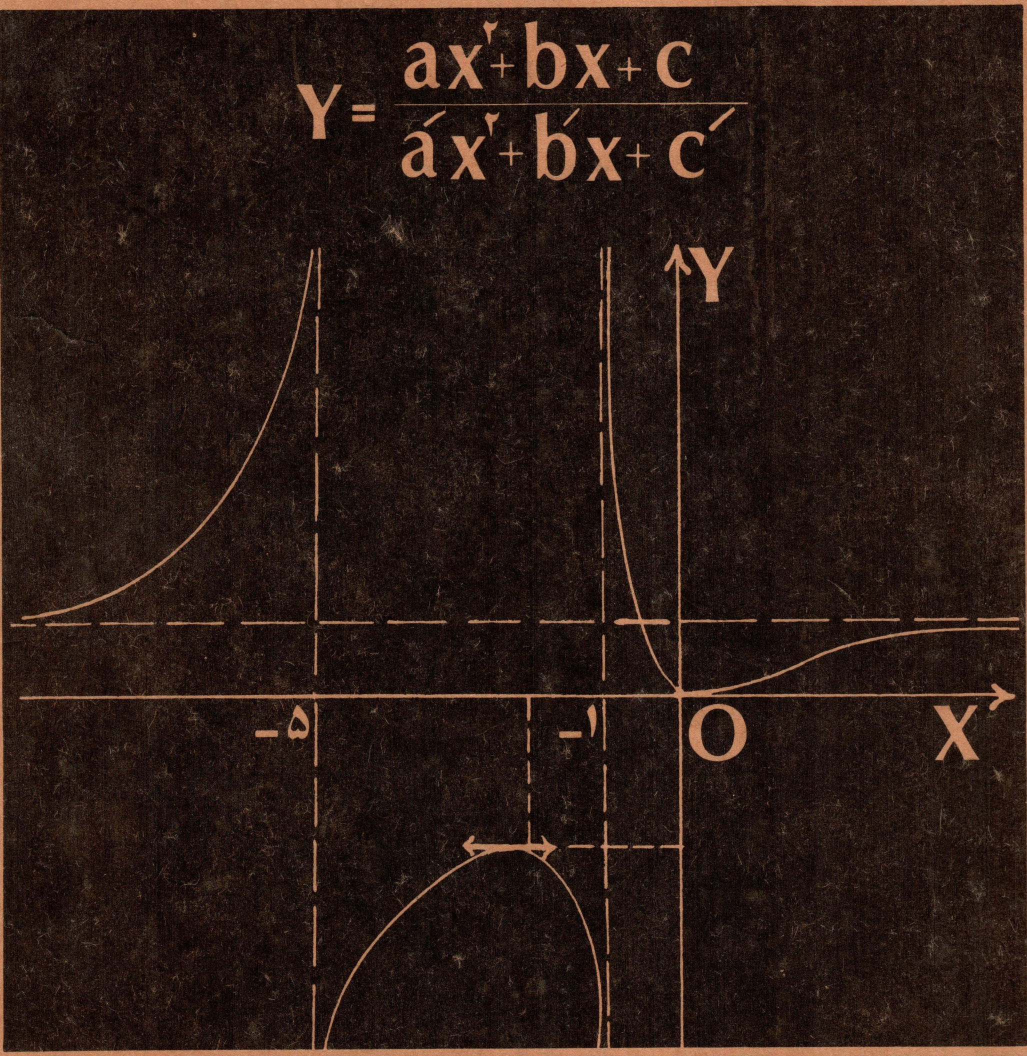
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
تعلیم و تعلم عبادت است

جبر و آنالیز



سال چهارم

آموزش متوسطهٔ عمومی - ریاضی و فیزیک

۲۹۵

بسم الله الرحمن الرحیم

جبر و آنالیز

سال چهارم

آموزش متوسطهٔ عمومی

ریاضی و فیزیک

۱۳۷۵

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتابهای درسی**

نام کتاب: **جبر و آنالیز چهارم دبیرستان ـ ۲۹۵**

مؤلفان : **غلامرضا عسجدی، جلیل‌الله قراگزلو، هدایت‌الله موسوی و محمدعلی واعظیان**

آماده‌سازی ونظارت بر چاپ و توزیع: **دفتر چاپ و توزیع کتابهای درسی**

صفحه‌آرا : **حسن صالحی علائی**

ناشر: **شرکت چاپ و نشر ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۵ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان داروپخش**

تلفن: ۴ ـ ۶۰۲۶۲۴۱، فاکس: ۶۰۲۶۲۴۰ ، صندوق پستی: ۱۳۴۴۵/۶۸۴

چاپخانه : **شرکت افست «سهامی عام»**

سال انتشار : **۱۳۷۵**

مبارزهٔ علمی برای جوانان، زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیّتها و حقیقتها است. و امّا مبارزهٔ عملی آنان در بهترین صحنه‌های زندگی و جهاد و شهادت شکل گرفته است.

امام خمینی «قدّس سرّه الشّریف»

معلّمان محترم و اولیای گرامی دانش‌آموزان و صاحبنظران می‌توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب
این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران ـ صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳ ـ گروه درسی مربوط ارسال نمایند.
دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی

فهرست

فصل ۱ ـ یادآوری و تکمیل	۱
فصل ۲ ـ حد	۲۹
فصل ۳ ـ توابع مشتق‌پذیر	۷۲
فصل ۴ ـ خط مجانب	۹۹
فصل ۵ ـ رسم نمودار هندسی یک تابع حقیقی	۱۱۵
فصل ۶ ـ تعیین تعداد ریشه‌ها و حل تقریبی معادلهٔ درجه سوم	۱۵۳
فصل ۷ ـ دیفرانسیل و انتگرال	۱۶۵
مسائل متفرقه	۲۰۹
مجموعهٔ سؤالات امتحان نهایی جبر و آنالیز سال چهارم ریاضی و فیزیک استانهای کشور	۲۲۰
تست جبر و آنالیز	۲۴۷

فصل ۱

یادآوری و تکمیل

بیشتر مطالب این فصل و فصل ۳ همان مطالبی است که در کتاب حساب و جبر سال سوم با آنها آشنا شده‌اید. چون این مطالب اهمیت زیادی دارند آنها را یادآوری نموده و در جهت تکمیل آنها مطالبی اضافه می‌کنیم. چون این مطالب را قبلا خوانده‌اید مسلم است که سرعت فراگیری آنها زیاد خواهد بود.

۱-۱- تعریف تابع

فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. f زیر مجموعه از حاصلضرب دکارتی $A \times B$ (یعنی یک رابطه از A به B) را یک تابع گویند هرگاه (a و b)∈f و (a و b′)∈f، آنگاه $b = b'$. به عبارت دیگر f مجموعه‌ایست از جفت‌های مرتب در $A \times B$ به قسمی که هیچ دوعضو متفاوت f دارای مؤلفه‌های اول مساوی نباشند.

مثال: دو مجموعه A = {۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵} و B = {۱− و ۰ و ۳ و ۵} مفروض است حاصلضرب دکارتی $A \times B$ عبارتست از:

A × B = {(۱ و ۱−) و (۱ و ۰) و ... و (۲ و ۱−) ... و (۳ و ۰) ... و (۴ و ۳) و ...}

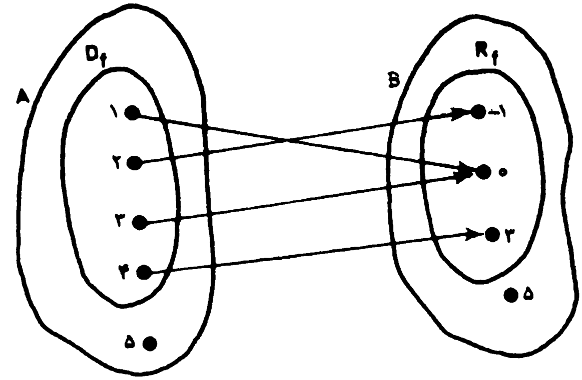
رابطه f = {(۱ و ۰) و (۲ و ۱−) و (۳ و ۰) و (۴ و ۳)}

یك زیرمجموعهٔ $A \times B$ را درنظر می گیریم. رابطه f یک تابع است، زیرا هیچ دو عضو متفاوت f دارای مؤلفه‌های اول مساوی نیستند.

۱-۲- دامنهٔ تعریف و برد تابع

مجموعهٔ مؤلفه‌های اول اعضای تابع f را دامنهٔ (دامنهٔ تعریف) f و مجموعهٔ مؤلفه‌های دوم اعضای f را برد f می‌خوانند و آنها را به‌ترتیب با D_f و R_f نشان می‌دهند.

مثال: فرض کنید A = {۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵} و B = {۱− و ۰ و ۳ و ۵} و شکل صفحهٔ بعد تابع f را مشخص می کند. دامنه و برد f را مشخص کنید.



$D_f = \{۱ و ۲ و ۳ و ۴\}$ و $R_f = \{-۱ و ۰ و ۳\}$

۱-۳- مقدار تابع

وقتی $(x و y)$ عضو دلخواهی از f باشد y را مقدار تابـع f در x می‌خوانند و معمولاً آن را به‌صورت $y = f(x)$ می‌نویسند. در این مقام مؤلفه اول، یعنی x، را متغیـر مستقل ومؤلفهٔ دوم، یعنی y، را متغیر تابع میخوانند، توجه کنید که تابع f، که مجموعه‌ای از زوجهای مرتب است، بامقدارآن در x، یعنی $f(x)$، فرق دارد.

هرگاه f یـك تابع باشد ، مؤلفه دوم هر زوج مرتب در f بطور یگانه‌ای از روی مؤلفه اول آن زوج مرتب مشخص می‌شود و بدین‌ترتیب از روی f قـانون یا ضابطه‌ای بدست می‌آیدکه به‌کمك آن می‌توان به هر عضو x از D_f یك و تنها یك عضو y متعلق بـه R_f متناظر ساخت به‌قسمی که $(x و y) \in f$. به عکس هرگاه ضابطه یا قانونـی داشته باشیم که به هر عضو x از یك زیر مجموعهٔ A یك و تنها یـك عضو $y \in B$ را نسبت دهـد، مجموعـهٔ همهٔ زوجهای مرتب $(x و y)$ که به این ترتیب حاصل می‌شود تابعی از A بـه B نامیده می‌شود از ایـن رو معمولاً برای مشخص کردن تابع،دامنهٔ آن و قانون یا ضابطه را می‌دهند، و اگر دامنه داده نشود باید آن را بزرگترین زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ مرجع (مورد بحث) اختیارکرد که آن قانون برای آن زیر مجموعه با معنی است.

مثال ۱: تابع f به شکل زیر داده شده است:

$$f = \{(x و y) | x \in N و x < ۵ و y = x^۲ - ۴x + ۳\}$$

تابع f را به شکل زوجهای مرتب بنویسید (N مجموعهٔ اعداد طبیعی است.)

حل: $f = \{(۱ و ۰) و (۲ و -۱) و (۳ و ۰) و (۴ و ۳)\}$

مثال ۲: دامنهٔ تعریف تابع زیر را مشخص کنید:

$$f = \{(x و y) | y = \sqrt{۱ - x^۲}\}$$

جواب: دامنهٔ تعریف آن چنین است :

$$D_f = \{x \mid ۱ - x^۲ \geqslant ۰\}$$

$$۱ - x^۲ \geqslant ۰ \qquad x^۲ \leqslant ۱ \qquad -۱ \leqslant x \leqslant ۱$$

$$D_f = [-۱ \text{ و } ۱]$$

مثال ۳ : دامنهٔ تعریف تابع f راکه به وسیلهٔ $x \xmapsto{f} f(x) = \dfrac{x^۲ + ۱}{x^۲ - ۲x}$ مشخص شده است تعیین کنید:

جواب: دامنهٔ تعریف آن چنین است:

$$D_f = R - \{۰ \text{ و } ۲\}$$

۱-۴- مشخص کردن یك تابع

هر تابع بادامنهٔ تعریف، و مقدار آن بازاء هریك از اعضاء دامنهٔ تعریفش مشخص می‌شود معمولا تابع را به‌شکلهای مختلف مشخص می‌کنند.

الف- وقتی‌که عده اعضاء دامنهٔ تعریف کم باشد می‌توان تابع را بوسیله یك جدول‌تعریف کرد برای این‌کار عضوهای دامنهٔ تعریف را بریك سطر ومقادیر متناظر تابع را زیر آن‌می‌نویسیم، یعنی بازاء هر x از دامنهٔ تعریف،مقدار تابع را در x برسطر زیرین می‌نویسیم.

مثلا جدول

x	۵	$\sqrt{۲}$	π	e	v
f(x) = y		۱	۲	۲	

تابع $\{(۲ \text{ و} e)\text{ و}(۲ \text{ و } \pi) \text{ و } (۱ \text{ و } \sqrt{۲})\} = f$ را مشخص می‌کند.

ب- طریقهٔ کلی مشخص کردن تابع اینست‌که:

اولا: دامنهٔ تعریف تابع را معلوم می‌کنند.

ثانیاً : ضابطه‌ای برای تعیین مقدار تابع بازاء هرعضو دامنهٔ تعریفش به دست می‌دهند. (البته باید این ضابطه چنان باشدکه بازاء هرعضو دامنهٔ تعریف یك وتنها یك مقدار برای تابع بدست دهد) بنابراین ضابطهٔ تعریف تابع فرمولی است‌که مقدارتابع را برحسب x به دست می‌دهد، ومعمولاآنرا به‌صورت $y = f(x)$ نمایش می‌دهند.

مثلا : ضابطهٔ $y = ۳x + ۲$ و $x \in R$ تابعی در R تعریف می کند و اگـر این تـابع را f بنامیم مقدار تابع $f(x) = ۳x + ۲$ بوده و تابع به صورت زیرمشخص می‌گردد.

$$f = \{(x \text{ و } y) \mid x \in R \text{ و } y = ۳x + ۲\}$$

گاهی تابع f بر R با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ را به صورت زیر هم نمایش می‌دهند:

$$x \xrightarrow{f} f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ و } x\in R$$

ج- بسیاری از توابع هستند که ضابطهٔ آنها با فرمول قابل بیان نیست و ناچار آنها را بوسیله جدول نمایش می‌دهند.

مثلا: اگر $A=\{۴/۳ \text{ و } ۱/۵ \text{ و } ۰/۴ \text{ و } ۲\}$ باشد، تابع f بر A با ضابطهٔ (y جزء صحیح x) به صورت زیر مشخص می‌شود.

x	۴/۳	۱/۵	۰/۴	۲
$f(x)=y$	۴	۱	۰	۲

د- گاهی مقدار یك تابع در سراسر دامنهٔ تعریفش با یك ضابطه مشخص نمی‌شود ناچار باید آنرا با چند ضابطه مشخص نمود (به اینگونه توابع، تابع باچند ضابطه می‌گویند).

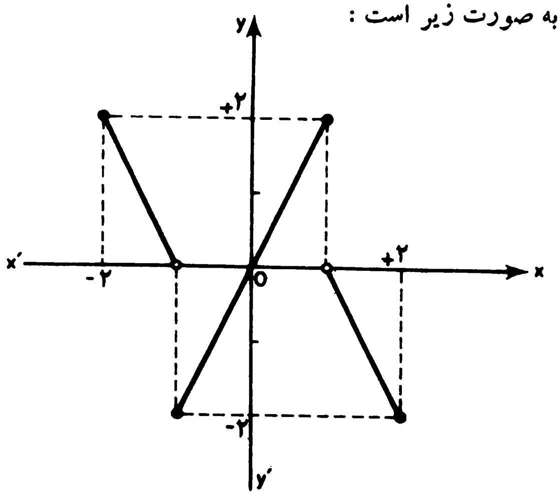
مثلا اگر A دامنهٔ تعریف تابع f دارای دو زیر مجموعهٔ جدا از هم A_1 و A_2 باشد به طوری که $A=A_1 \cup A_2$ و مقادیر تابع بر A_1 بایك ضابطه وبر A_2 با ضابطهٔ دیگر مشخص شوند آن را به صورت زیر عرضه می‌کنند.

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) \text{ و } x\in A_1 \\ f_2(x) \text{ و } x\in A_2 \end{cases}$$

مانند تابع f در $A=[-۲ \text{ و } ۲]$ که به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} -2x-2 \text{ ، } x\in[-۲ \text{ و } -۱[\\ 2x \text{ ، } x\in[-۱ \text{ و } ۱] \\ -2x+2 \text{ ، } x\in]۱ \text{ و } ۲] \end{cases}$$

که شکل آن به صورت زیر است :

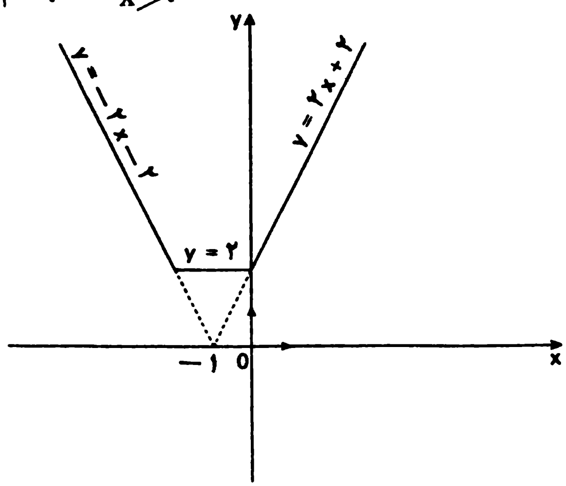


مثال: تابع f بر R باضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+2)^2}$ تعـریف شده است . ایـن تابع را به صورت تابع با چند ضابطه بنویسید.

حل:
$$f(x)=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+2)^2}=|x|+|x+2|$$

x	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$\|x\|$	$-x$		$-x$	0	x
$\|x+2\|$	$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$
$f(x)$	$-2x-2$	2	2	2	$2x+2$

$$f(x)=\begin{cases}-2x-2 & ,\quad x<-2\\ 2 & ,\ -2\leqslant x\leqslant 0\\ 2x+2 & ,\quad x>0\end{cases}$$



۱-۵- تابع عددی با متغیر حقیقی یا تابع حقیقی

هرگاه دامنه و برد تابعی زیر مجموعه‌هائی از R یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی، باشندآنگاه آن تابع را یك تابع عددی با متغیر حقیقی یا تابع حقیقی می‌نامند دراین‌کتاب اغلب سروکارمان با توابع حقیقی‌است، وهرجا عبارت، تابع $y=f(x)$ بکاررفته ، منظور تابع f به R با ضابطهٔ تعریف $y=f(x)$ می‌باشد.

۱-۶- تابع جزء صحیح

هر عدد حقیقی را می‌توان مجموع یك عدد درست n ویکعدد حقیقی مثبت p که بین صفر ویك می‌باشد فرض‌گرفت (درحالت خاص ممکن است p مساوی صفر باشد).

مثلا: در عدد ۲/۷۵ داریم $n=۲$ و $p=۰/۷۵$

ودرعدد $-۲/۳$ داریم $n=-۳$ و $p=۰/۷$

و در عدد $۵\frac{۲}{۳}$ داریم $n=۵$ و $p=\frac{۲}{۳}$

بطورکلی برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$\forall x\in R \quad و \quad \exists n\in Z ، x=n+P \quad و \quad ۰\leqslant P<۱ \qquad (۱)$$

n، بزرگترین عدد درست نابزرگتر از x، را جزء صحیح x نامیده و آن را با نماد $[x]$ یا $E(x)$ نمایش می‌دهند با توجه به (۱) داریم:

$$\forall x\in R \quad و \quad \exists n\in Z \quad P=x-n \quad و \quad ۰\leqslant x-n<۱$$

$$\boxed{\forall x\in R \quad و \quad \exists n\in Z \quad n\leqslant x<n+۱ \Longleftrightarrow [x]=n}$$

مثال: اگر $x=-۱/۴$ باشد $[x]$ را بدست‌آورید.

حل: چون $-۲\leqslant -۱/۴<-۱$ است طبق تعریف $[-۱/۴]=-۲$ میگردد.

مثال: اگر $۳\leqslant x<۴$ باشد $[x]$ را بدست‌آورید.

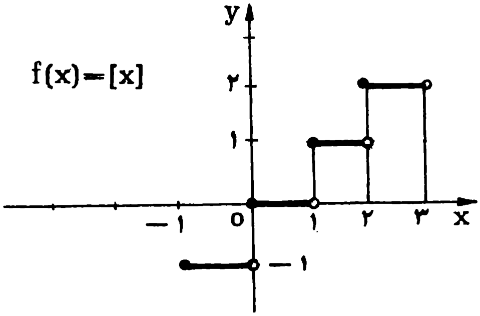
حل: اگر $[x]=n$ بگیریم با توجه به تعریف بالا باید داشته باشیم $n\leqslant x<n+۱$ و چون $x<۴$ است $n<۴$ خواهد بود اما بزرگترین عدد درستی که از چهار کوچکتر باشد $n=۳$ است یعنی $[x]=۳$

از نظر تابعی، تابع حقیقی f از R به Z راکه به صورت $f(x)=[x]$ تعریف شده است تابع جزء صحیح می‌نامند

$$f: R\longrightarrow Z$$

$$x\xrightarrow{f}[x]=n \quad و \quad n\leqslant x<n+۱$$

نمودار این تابع درفاصله $]-۱ \text{ و } ۳]$ به صورت زیر است.



نتایج بدست آمده از تعریف عبارتست:

۱- $\forall x\in R \quad [x]\leqslant x<[x]+1$

۲- $\forall x\in R \quad 0\leqslant x-[x]<1$

۳- $\forall x\in R \quad x-1<[x]\leqslant x$

۴- الف : $x\notin Z \Longrightarrow [-x]=-[x]-1$

ب : $x\in Z \Longrightarrow [-x]=-[x]$

در نتیجه ج : $[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & \text{اگر } x\in Z \\ -1 & \text{اگر } x\notin Z \end{cases}$

۵- اگر n عدد صحیح و m عدد حقیقی باشد داریم:

$$n\leqslant mx<n+1 \Longleftrightarrow [mx]=n$$

۶- برای هرعدد حقیقی x و هر عدد درست n داریم:

$$[x+n]=[x]+n$$

۱-۷- تساوی دو تابع

شرط لازم وکافی برای آنکه دو تابع f و g با هم مساوی باشند آن است که:

اولا: دامنه‌های تعریف دو تابع برابرباشند. یعنی: $D_f=D_g$

ثانیاً: بازاء هر x از دامنهٔ تعریف‌مشترك مقدار دوتابع برابرباشند. یعنی: $f(x)=g(x)$.

مثلا دوتابع حقیقی f و g که به‌صورت:

$$f(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1} \qquad g(x)=x^2-1$$

تعریف شده‌اند با هم برابرند ولی توابع حقیقی h و k که به صورت:

$$h(x)=\frac{x^2-x}{x} \quad \text{و} \quad k(x)=x-1$$

تعریف شده‌اند باهم مساوی نیستند زیرا صفر در دامنهٔ k قرار دارد در حالی کـه متعلق به دامنهٔ h نیست. البته اگر دامنهٔ k را همه عددهای حقیقی مخالـف صفر فرض کنیـم، آن وقت $h=k$.

تمرین

۱- رابطه f در R باگزاره‌نمای $y=x^2-3x+2$ تعریف شده است. آیا این رابطه تابع است؟

۲ـ رابطه f در R باگزاره نمای $x^۲ - y^۲ = ۱$ تعریف شده است. آیا این رابطه تابع است؟

۳ـ آیا رابطه زیر یك تابع است؟ با چه تغییراتی می‌توان آنرا به‌یك تابع تبدیل نمود.

$$x \in [-۲ , +۲] \text{ و } x \xrightarrow{f} f(x) = \frac{۱}{۲}(x \pm \sqrt{۱۲ - ۳x^۲})$$

۴ـ آیا رابطهٔ زیر یك‌تابع است ؟

$$x \in R \text{ و } x \xrightarrow{f} f(x) = \sqrt{۱ - x} + \sqrt{x - ۲}$$

۵ـ تساوی $y^۲ - ۲xy + ۲x^۲ - ۱ = ۰$ ضابطه‌هائی برای دو تابع به دست می‌دهد. آنها را از هم جدا کنید و دامنهٔ تعریف وبرد هریك را معین کنید.

۶ـ تابع f بر R با ضابطهٔ $f(x) = |x| + |x + ۱| + |x - ۱|$ تعریف شده این تابع را به صورت تابع با چند ضابطه بنویسید. سپس نمودار تابع را رسم کنید.

۷ـ دامنهٔ تعریف هریك از توابع زیر را معین کنید.

$$x \in R \text{ و } x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{x + ۲}{x^۳ - x}$$

$$x \in R \text{ و } x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{۱}{\sqrt{x^۲ - x - ۲}}$$

$$x \in R \text{ و } x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \sqrt[۳]{x^۳ - ۳x}$$

$$x \in R \text{ و } x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{|x - ۱|}{\sqrt{(x - ۱)^۲}}$$

$$x \in R \text{ و } x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{x}{۱ - [x]}$$

$$x \in R \text{ و } x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \sqrt{x^۲ - ۳x + ۲} - \sqrt{x^۲ + ۲x - ۳}$$

$$x \in R \text{ و } x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \sqrt{(x + ۲)x} + \sqrt{x(x - ۱)}$$

$$x \in R \text{ و } x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \sqrt{\frac{۱ - x}{x + ۲}}$$

۸ـ مجموعهٔ $A=\left\{-\frac{\pi}{۲} \text{ و } \pi \text{ و } \frac{\pi}{۲} \text{ و } ۰\right\}$ و تابعهای f و g بر A با ضابطه‌های

$f(x)=\sin x\cos x$ و $g(x)=x(x^۲-\frac{\pi^۲}{۴})(x-\pi)$ مفروضند آیا دوتابع f و g مساویند؟

۹ـ توابع f و g بر R با ضابطه‌های زیر مفروضند تعیین کنید کدامیك از این دو تابع با هم برابرند.

(۱) $f(x)=\frac{x}{x}$ $\qquad g(x)=۱$

(۲) $f(x)=\sqrt{x}\times\sqrt{x-۱}$ $\qquad g(x)=\sqrt{x(x-۱)}$

(۳) $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x-|x|}}$ $\qquad g(x)=\frac{۱}{\sqrt{|x|-x}}$

(۴) $f(x)=[\frac{x^۲}{x^۲+۱}]$ و $g(x)=۰$

۱۰ـ نمودار توابع زیر را رسم کنید. $(x\in R)$

$$\text{الف}: f(x)=\begin{cases} ۲x+۲ & \text{اگر } x\notin z \\ ۰ & \text{اگر } x\in z \end{cases}$$

$$\text{ب}: f(x)=\begin{cases} -x+۲ & \text{اگر } x<۰ \\ x^۲-۲x & \text{اگر } x\geqslant ۰ \end{cases}$$

۱۱ـ تابع f از R به Z باضابطهٔ $f(x)=۲[x]-۱$ تعریف شده است نمودار آنرا در فاصله]۲ و ۲ −] رسم کنید.

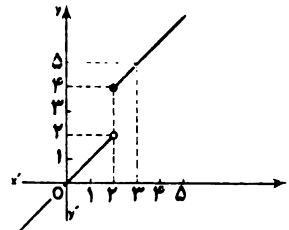
۱۲ـ تابع f در R با ضابطهٔ $f(x)=۲x-[x]$ تعریف شده است نمودار هندسی آنرا در فاصله]۲ و ۲ −] رسم کنید.

۱۳ـ تابع f از R به Z باضابطهٔ $f(x)=[x+۲]$ را درفاصله]۲ و ۲ −] رسم کنید.

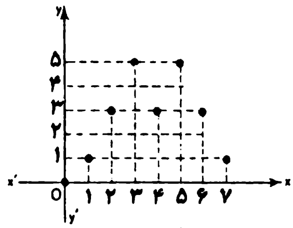
۱۴ـ تابع f از R به Z با ضابطهٔ $f(x)=[۲x]$ را درفاصله]۱ و ۱ −] رسم کنید.

۱۵ـ تابع f از R به R باضابطه $f(x)=x+[x]$ را درفاصله]۲ و ۱ −] رسم کنید.

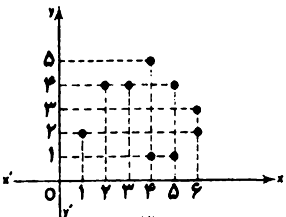
۱۶ ـ تعیین کنید کدامیك از نمودارهای صفحهٔ بعد نمودار یك تابع و کدامیك نمودار یك رابطه است.


y
x
x'
y'
O
۵
۴
۳
۲
۱
۱ ۲ ۳ ۴ ۵

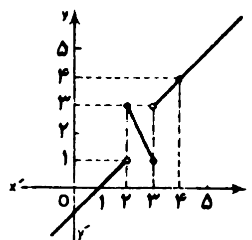
۱


y
x
x'
y'
O
۵
۴
۳
۲
۱
۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

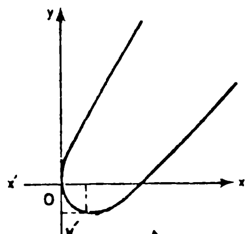
۲


y
x
x'
y'
O
۵
۴
۳
۲
۱
۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

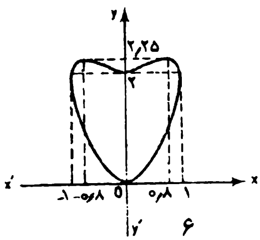
۳


y
x
x'
y'
O
۵
۴
۳
۲
۱
۱ ۲ ۳ ۴ ۵

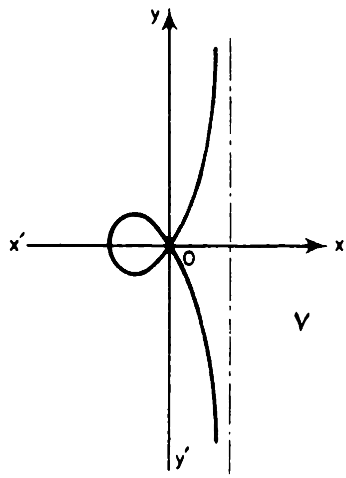
۴


y
x
x'
y'
O

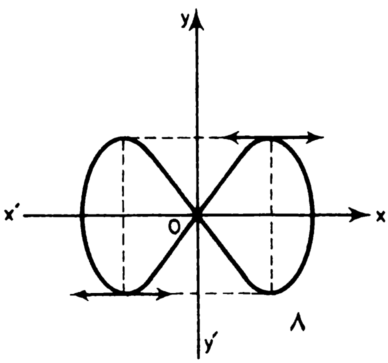
۵


y
x
x'
y'
O
۲٫۲۵
۲
۱- ۰٫۸- ۰٫۸ ۱

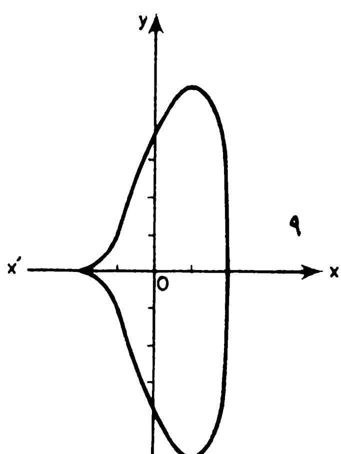
۶


y
x
x'
y'
O

۷


y
x
x'
y'
O

۸


y
x
x'
y'
O

۹

۱-۸- چند نوع تابع

I - تابع یك به یك - فرض کنید که f تابعی از A به B باشد. f را یك به یك (یا ۱-۱) گوییم اگر:

$$\forall x_1 \text{ و } x_2 \in D_f \quad , \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

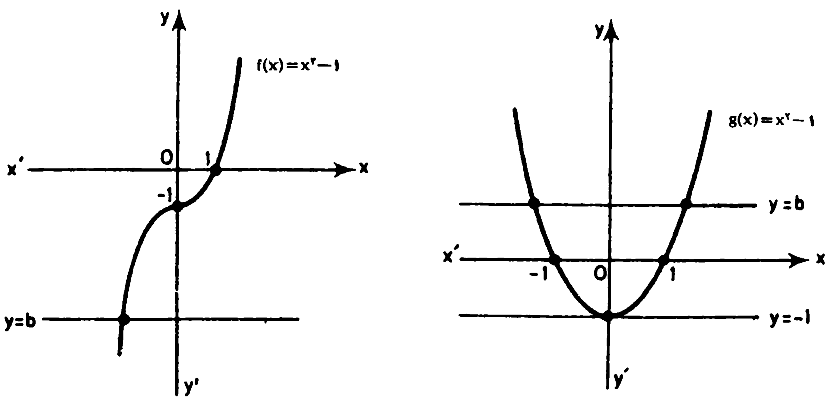
مثلا تابع f در R که با ضابطهٔ $f(x) = x^3 - 1$ تعریف شده است. یك به یك است زیرا:

$$\forall x_1 \text{ و } x_2 \in D_f \quad , \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1 \Longrightarrow x_1 = x_2$$

ولی تابع g در R که با ضابطهٔ $g(x) = x^2 - 1$ تعریف شده است یك به یك نیست زیرا:

$$\forall x_1 \text{ و } x_2 \in D_g \text{ و } g(x_1) = g(x_2) \Longrightarrow x_1^2 - 1 = x_2^2 - 1 \Longrightarrow x_1 = \pm x_2 \not\Longrightarrow x_1 = x_2$$

از روی نمودار تابع می‌توان یك به یك بودن آن را بررسی کرد بدین طریق که اگر خط افقی به‌معادله $y = b$ به ازاء جمیع مقادیر $b \in R_f$ نمودار تابع را فقط در یك نقطه قطع کند تابع یك به یك است درغیر این صورت یك‌به‌یك نیست.



دربالا، نمودار تابع f نشان می‌دهد که تابع f یك به یك است و نمودار تابع g نشان می‌دهد که تابع g یك به یك نیست.

تابع یك به یك را می‌توان به صورت:

$\forall x_1 , x_2 \in D_f \qquad x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ نیز تعریف کرد. (چرا؟)

II- تابع پوششی - تابع f از A به B را پوششی گویند هرگاه $R_f = B$ باشد. به‌عبارت دیگر به ازای هر $y \in B$ عضوی مانند $x \in D_f$ وجود داشته باشد به قسمی که $y = f(x)$.

مثلا تابع f از R به R با ضابطهٔ $y = x^3 + 1$ پوششی است. زیرا دامنهٔ تعریف $D_f = R$ و برد تابع $R_f = R$ بوده و داریم: $x = \sqrt[3]{y - 1}$ که بازاء هر y ی متعلق به‌برد تابع یعنی $y \in R$

لااقل یک x ی متعلق به‌دامنه تعریف تابع یعنی $x\in R$ به دست می‌آید که $y=x^3+1$ باشد.

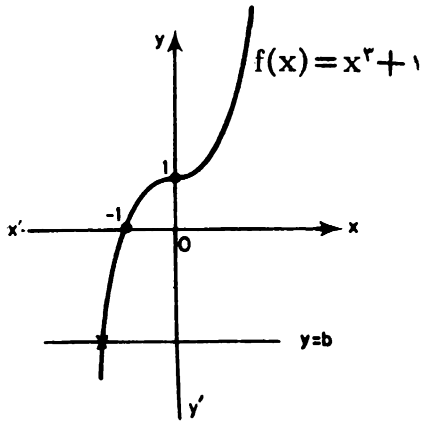
ولی تابع g از R به R با ضابطه $g(x)=x^2-1$ پوششی نیست. زیرا دامنهٔ تعریف تابع $D_g=R$ و برد تابع مجموعهٔ $R_g=[-1, +\infty[$ است که با مجموعهٔ اعداد حقیقی R برابر نیست و از طرفی $x=\pm\sqrt{y+1}$ است. و به ازاء $y=-2\in R$ ، x ی متعلق به دامنهٔ تعریف پیدا نمی‌شود که در $y=x^2-1$ صدق کند. چنانچه تابع f از A به B پوششی باشد. از هرنقطه بعرض $y=b\in B$ خط افقی رسم کنیم این‌خط نمودار تابع را لااقل در یک نقطه قطع می‌کند.

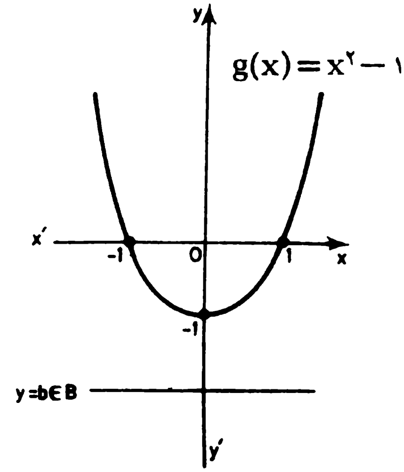
$f : R \longmapsto R$

$f : x \longmapsto y=x^3+1$

$g : R \longmapsto R$

$g : x \longmapsto y=x^2-1$





نمودار تابع f نشان می‌دهد که تابع f پوششی است و نمودار تابع g نشان می‌دهد که تابع g پوششی نیست. ولی تابع g از R به $[-1, +\infty[$ با ضابطهٔ $g(x)=x^2-1$ پوششی است زیرا برد تابع $R_g=[-1, +\infty[$ است.

III– تابع یکنوا – اگر A زیرمجموعهٔ R و f تابعی از A به R باشد گوئیم.

الف– تابع f روی A اکیداً صعودی است اگر:

$$\forall x_1 , x_2\in A \quad , \quad x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)<f(x_2)$$

ب– تابع f روی A اکیداً نزولی است اگر:

$$\forall x_1 , x_2\in A \quad , \quad x_1<x_2 \Longrightarrow f(x_1)>f(x_2)$$

ج– تابع f روی A اکیداً یکنواست هرگاه: اکیداً صعودی یااکیداً نزولی باشد.

مثلاً: تابع f در R باضابطهٔ $f(x)=x^3$ اکیداً صعودی است.

زیرا:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f \quad ، \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow x_1^3 < x_2^3$$

درنتیجه می‌توان گفت تابع f در R اکیداً یکنواست.

د ـ تابع f روی A صعودی است اگر:

$$\forall x_1 , x_2 \in A \quad ، \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

هـ ـ تابع f روی A نزولی است اگر:

$$\forall x_1 , x_2 \in A \quad ، \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

و ـ تابع f روی A یکنواست هرگاه: f روی A صعودی یا نزولی باشد.

مثلاً : تابع g در R با ضابطهٔ

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x \leqslant 0 \\ -x^2 + 1 & x \geqslant 1 \end{cases}$$

نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست. زیرا هرچه باشد x_1 و x_2 کوچکتر از صفر یا بزرگتر از یك داریم:

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

و اما بازاء $x_1 = 0$ و $x_2 = 1$ داریم

$$x_1 = 0 < x_2 = 1 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2) = 0$$

پس تابع g روی D_g نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست درنتیجه مـی‌توان گفت تابع g روی D_g یکنواست ولـی اکیداً یکنوا نیست برای تعیین فواصل یکنوائـی تابع ازقضیه زیر استفاده می کنند.

قضیه ـ تابع f درهر فاصله‌ای که مشتق آن یعنی f' مثبت باشد (مگر احیاناً درتعداد بـا پایانی نقطه صفرشود) اکیداً صعودی و درهر فاصله ای که مشتق آن منفی باشد(مگردرتعداد باپایانی نقطه صفر شود) اکیداً نزولی و درهر فاصله‌ای که مشتق آن برابر صفرباشد، مقداری ثابت است.

قضیه ـ اگر تابع f اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) باشدآنگاه f، ۱ـ۱ است.

IV ـ تابع ثابت ـ فرض کنید که c عدد حقیقی و ثابت باشد تـابع f از R به R را که به صورت $f(x)=c$ تعریف شده است، تابع ثابت می‌نامند. واضح است‌که f نه یك به یك است و نه پوششی، نمودار این تابع خطی موازی محور x هاست.

V_ **تابع همانی** – تابعی‌مانند f از A به A را که برای هر $x \in A$ به‌صورت $f(x)=x$ تعریف شده است، تابع همانی روی A می‌نامند مثلا تابع

$$f=\{(۰ و ۰) و (۱ و ۱) و (۲ و ۲)\}$$

یك تابع همانی روی مجموعهٔ $A=\{۰ و ۱ و ۲\}$ است.

معمولا تابع همانی روی مجموعه‌ای مانند A را به I_A نشان می‌دهند. تابع همانی‌روی R تابعی است مانند f از R به R که برای هر $x \in R$ بـه صورت $f(x)=x$ تعریف شده است نمودار این تابع، نیمساز ناحیه اول وسوم است.

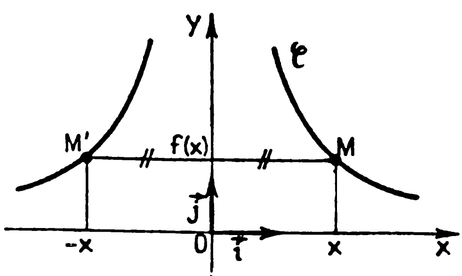
VI_ **تابع زوج و تابع فرد** _ الف_ تابع fرا زوج گویند، هرگاه:

اولا: برای هر $x \in D_f$ داشته‌باشیم: $-x \in D_f$

ثانیاً: برای هر $x \in D_f$ داشته‌باشیم: $f(-x)=f(x)$.

تابعهائی که بوسیله‌دستورهای $y=x^۲-۱$ و $y=\cos x$ و $y=x\sin x$ تعریف شده‌اند نمونه‌هائی ازتابع زوج هستند.

نمودار هندسی تابع‌زوج نسبت‌به‌محور yها تقارن‌دارد.



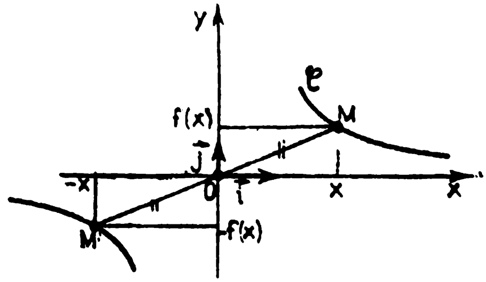
ب_ تابع f را فردگویند هرگاه:

اولا: برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم : $-x \in D_f$

ثانیاً: برای‌هر$x \in D_f$داشته‌باشیم: $f(x)=-f(-x)$

تابعهای $y=x^۳-x$ و $y=x+\sin x$ و $y=\frac{x}{x^۲+۱}$، نمونه‌هائی‌ازتابعهای فردهستند.

نمودار هندسی تابع فرد نسبت به مبداء مختصات تقارن دارد.



مورد استفاده: معمولا در رسم نمودار یك تابع، از زوج وفرد بودن تابع وخاصیت تقارن استفاده نموده ابتدا قسمتی از نمودار تابع را می‌کشند وبعد قرینه آن را نسبت به محورyها یا مبداء مختصات رسم می‌کنند.

VII- تابع متناوب- تابع f در R با دامنهٔ تعریف D_f رایك تابع متناوب بادورهٔ تناوب T$(T\neq 0)$ می‌نامیم درصورتیکه:

اولاً: اگر $x\in D_f$ آنگاه $x\pm T\in D_f$

ثانیاً: $f(x\pm T)=f(x) \ ,\ \forall x\in D_f$

کوچکترین Tی مثبت را دورهٔ تناوب اصلی تابع می‌گویند.

مثال ۱- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sin 3x$ را تعیین کنید.

حل: $D_f=\mathcal{R}$، فرض‌کنید T دورهٔ تناوب f باشد داریم،

$$f(x+T)=f(x) \Longrightarrow \sin(3x+3T)=\sin 3x$$

$$3x+3T=3x+2K\pi \Longrightarrow T=\frac{2}{3}K\pi$$

کوچکترین مقدار مثبت T به ازای $K=1$ بدست می‌آید $T=\frac{2}{3}\pi$. بدیهی است که اگر $x\in D_f$ سپس $x+T\in D_f$.

مثال ۲- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=mx-[mx]$ را بدست‌آورید $(m\in N)$.

حل: فرض‌کنید T دورهٔ تناوب تابع باشد، داریم:

$$f(x+T)=f(x)$$

$$m(x+T)-[m(x+T)]=mx-[mx]$$

$$[mx+mT]-mT=[mx] \qquad (1)$$

بدیهی‌است اگر mT عدد صحیح باشد خواهیم داشت، $[mx+mT]=[mx]+mT$ در نتیجه، رابطهٔ (۱) برقرار است. بنابراین برای تعیین دورهٔ تناوب باید mT را کوچکترین

عدد صحیح مثبت بگیریم. پس داریم:

$$mT=۱ \Longrightarrow T=\frac{۱}{m}$$

مثال ۳- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ را تعیین کنید.

حل: داریم $D_f=\mathbb{R}$، اگر T دورهٔ تناوب f باشد داریم،

$$f(x+T)=f(x) \Longrightarrow |\sin(x+T)|+|\cos(x+T)| \qquad (۱)$$
$$=|\sin x|+|\cos x|$$

رابطهٔ(۱) وقتی برقرار است که $T=\frac{k\pi}{۲}$ و به‌ازای $k=۱$ دورهٔ‌تناوب $T=\frac{\pi}{۲}$ بدست می‌آید.

بطور کلی: دورهٔ تناوب توابع $f_۱(x)=\sin ax$ و $f_۲(x)=\cos ax$ برابر $T=\frac{۲\pi}{a}$ و دورهٔ تناوب $f_۳(x)=tg\,ax$ و $f_۴(x)=cotg\,ax$ برابر با $T=\frac{\pi}{a}$ است.

مثال ۴- دورهٔ تناوب تابع $y=\sin ۴x+\cos ۶x$ را تعیین کنید.

$T_۱$ دورهٔ تناوب $\sin ۴x$ عبارتست‌از : $T_۱=۲\pi : ۴=\frac{\pi}{۲}$

$T_۲$ دورهٔ تناوب $\cos ۶x$ عبارتست‌از: $T_۲=۲\pi : ۶=\frac{\pi}{۳}$

اگر $T_۱$ و $T_۲$ را متحدالمخرج کنیم می‌شود $T_۱=\frac{۳\pi}{۶}$ و $T_۲=\frac{۲\pi}{۶}$ و چون کوچکترین مضرب مشترک ۳ و ۲ برابر ۶ است وداشتیم $T_۱=۳\times\frac{\pi}{۶}$ و $T_۲=۲\times\frac{\pi}{۶}$ پس $T=۶\times\frac{\pi}{۶}$ یعنی دورهٔ تناوب تابع فوق $T=\pi$ می‌باشد.

مثال ۵- دورهٔ‌تناوب تابع $y=\sin\frac{۲}{۳}x+\cos\frac{۱}{۶}x$ را تعیین کنید . دورهٔ تناوب تابع $\cos\frac{۱}{۶}x$ برابر است با: $T_۱=۲\pi : \frac{۱}{۶}=۱۲\pi$ و دورهٔ تناوب تابع $\sin\frac{۲}{۳}x$ برابراست‌با : $T_۲=۲\pi : \frac{۲}{۳}=۳\pi$ چون کوچکترین مضرب مشترک بین ۱۲ و ۳ عبارت است از ۱۲ پس $T=۱۲\times\pi=۱۲\pi$!

تذکر: قبل‌از تعیین دورهٔ تناوب یك تابع لازم است در صورت امکان تابع را ساده‌کنیم و سپس دورهٔ تناوب را برای‌آن تابع تعیین‌کنیم.

مثال ۶- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=tg\,x-cotg\,x$ را تعیین‌کنید.

حل : اگر تابع فوق را ساده نکنیم، $T=\pi$ بدست می‌آید که دورهٔ تناوب نیست. بعداز خلاصه کردن داریم:

$$f(x)=\frac{\sin^{2}x-\cos^{2}x}{\sin x\cdot\cos x}\implies f(x)=-2\cot 2x$$

بنابراین دورهٔ تناوب تابع f برابر است با $T=\frac{\pi}{2}$.

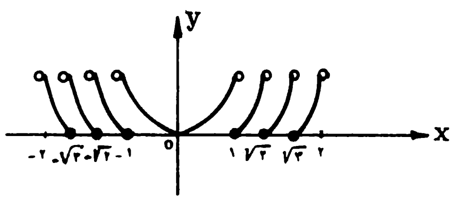
مثال ۷- نشان دهید تابع $f(x)=x^{2}-[x^{2}]$ متناوب نیست:

حل : فرض کنیم تابع f متناوب باشد و T_0 دورهٔ تناوب آن باشد داریم:

$$f(x+T_0)=f(x)\implies (x+T_0)^{2}-[(x_0+T)^{2}]=x^{2}-[x^{2}]$$

$$T_0^{2}+2xT_0=[x^{2}+T_0^{2}+2xT_0]-[x^{2}] \qquad (1)$$

طرف راست تساوی(۱) همواره عدد صحیح است. بنابراین به‌ازای هر $x\in R$ ، $T_0^{2}+2xT_0$ باید عدد صحیح باشد و این غیر ممکن است. نمودار تابع در زیر رسم شده است.

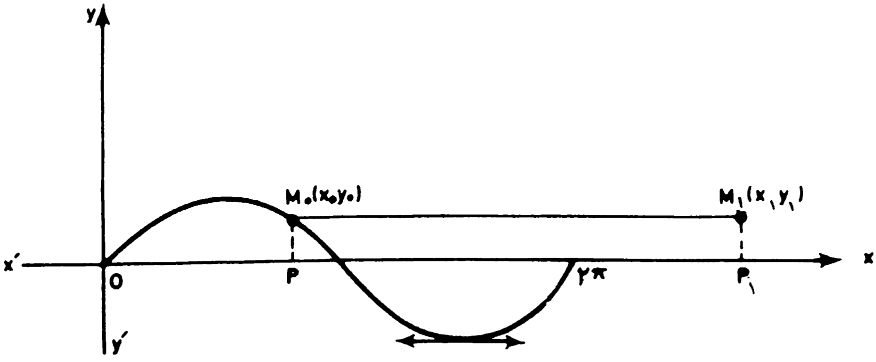


مورد استفاده : برای رسم منحنی(C) نمایش تابع مثلثاتی متناوب $y=f(x)$ ابتدا منحنی (C_0) نمایش مذکور را بوسیله جدول تغییرات آن در یکی از فاصله‌های تناوب مثلا $(a , a+T)$ رسم نموده سپس منحنی حاصل را به‌اندازه بردار $\overrightarrow{V}$ موازی محورxها که اندازه جبری آن روی محورxها kT (k عددی درست است) می‌باشد انتقال می‌دهیم هرگاه به k اعداد درست بدهیم و عمل را ادامه دهیم منحنی (C) نمایش تابع رسم می‌شود.

مثلا اگر (C_0) نمایش تابع $y=\sin x$ در فاصلهٔ $[0 , 2\pi]$ (شکل بعد) و M_0 نقطه‌ای از آن به مختصات $(x_0 , \sin x_0)$ باشد هرگاه نقطهٔ M_0 را به‌اندازهٔ بردار $\overrightarrow{V}$ موازی محور $x'x$ که اندازهٔ جبری آن $2k\pi$ (درشکل اندازهٔ جبری بردار $2k\pi$ را 2π اختیار کرده‌ایم) می‌باشد انتقال دهیم نقطهٔ $M_1(x_1 , y_1)$ بدست می‌آید.

داریم:

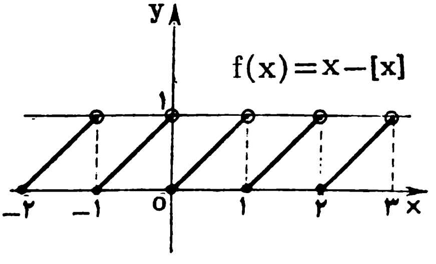
$$x_1=x_0+k\cdot 2\pi$$
$$y_1=y_0=\sin x_0=\sin(x_0+2k\pi)=\sin x_1$$



و چون مختصات $M_۱$ در معادلهٔ $y = \sin x$ صدق می‌کند پس $M_۱$ متعلق به نمودار است.

همچنین تـابع $f(x) = x - [x]$ یك تـابع متناوب با دورهٔ تناوب $T = ۱$ است زیـرا $[x + ۱] = [x] + ۱$ از این روکافی است که آن را در فاصله $[۰ \text{ و } ۱]$ بررسی کنیم.

برای $x \in [۰ \text{ و } ۱[$ داریم $f(x) = x$ و ازآنجا نمودارنمایش تابع مطابق شکل زیراست.



تمرین

۱ـ دورهٔ تناوب هریك از توابع زیر را بدست آورید.

الف : $f(x) = \sin \frac{۲}{۳}x + \cos \frac{۳}{۲}x$

ب : $f(x) = tg\frac{۱}{۳}x + cotg\frac{۱}{۴}x$

ج : $f(x) = tg۲x - cotg۲x$

د : $f(x) = ۲\cos ۳\pi(x + \frac{۱}{۶})$

ه : $f(x) = ۲x - [۲x]$

۲ـ تعیین کنید کدامیك از توابع زیر زوج و کدام یك فردند.

الف: $y = ۱ + x^۲ + \sqrt{۱ - x^۲}$

ب : $y = \frac{a^x + ۱}{a^x - ۱}$ $\quad ۱ \neq a > ۰$

ج : $y = x^۳ - ۳x$

د : $y = x[x^۲]$

ه : $y = \frac{۲x}{۱ + x^۲}$

و : $y = \frac{x}{[-x] + [x]}$

ز : $y = \sqrt[۳]{۵ - x} - \sqrt[۳]{x + ۵}$

ح : $y = \log(۲x + \sqrt{۴x^۲ + ۱})$

۳ـ تابع $f: x \mapsto (-۱)^{[x]}(x - [x])$ مفروض است: ثابت کنید دوره تناوب تابع $T = ۲$ است.

۴ـ تابع f از $[۰ و \pi] \to [-۱ و ۱]$ باضابطهٔ $f(x) = \sin^۴\frac{x}{۲} - \cos^۴\frac{x}{۲}$ مفروض است یك به یك وپوششی بودن آن را مشخص کنید.

۵ـ توابع f از R به R با ضابطه‌های زیر مفروضند. یك به یك و پوششی بودن هر یك را مشخص کنید.

الف : $f(x) = ۳x + ۲ + |x - ۲|$

ب : $f(x) = x - ۱ - |x - ۲|$

ج : $f(x) = x - [x]$

۱-۹- چند عمل روی توابع حقیقی

I- مجموع ، تفاضل ، حاصلضرب ، خارج قسمت دوتابع فرض کنید f و g توابعی‌حقیقی با دامنه‌های D_f و D_g باشند به‌کمك آنها می‌توان توابع‌جدیدی که با :

$$f+g \text{ و } f-g \text{ و } f.g \text{ و } \frac{f}{g}$$

نشان داده میشوند ساخت‌که‌آنها را به ترتیب مجموع ، تفاضل، حاصلضرب و خارج قسمت f و g می‌نامند.دامنۀتوابع $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ مقطع دامنه‌های f و g یعنی $D_f \cap D_g$ است ودامنه $\frac{f}{g}$ عبارت است‌از:

$$D_f \cap D_g - \{x \in D_g | \; g(x) = ۰\}$$

این توابع توسط دستورهای زیر تعریف میشوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \forall x \in D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \forall x \in D_f \cap D_g$$

$$(\frac{f}{g})\;(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall x \in D_f \cap D_g - \{x \in D_g \,|\, g(x) = ۰\}$$

مثال: فرض‌کنید $f(x) = \sqrt{x-۱}$ و $g(x) = \sqrt{۲-x}$ باشد . توابع $f \pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را بسازید.

حل:

$$D_f = \{x | x-۱ \geqslant ۰ \text{ و } x \in R\} = [۱ \text{ و } +\infty[$$

$$D_g = \{x | ۲-x \geqslant ۰\} =]-\infty \text{ و } ۲]$$

بنابراین دامنۀ تعریف $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ عبارتست از:

$$D_f \cap D_g = [۱ \text{ و } +\infty[\; \cap \;]-\infty \text{ و } ۲] = [۱ \text{ و } ۲]$$

ودامنه تعریف $\frac{f}{g}$ برابر است با:

$$D_f \cap D_g - \{x \in D_g \,|\, g(x) = ۰\} = [۱ \text{ و } ۲] - \{۲\} = [۱ \text{ و } ۲[$$

درنتیجه:

$$(f \pm g)(x) = \sqrt{x-۱} \pm \sqrt{۲-x} \qquad x \in [۱ \text{ و } ۲]$$

$$(f.g)(x) = \sqrt{(x-۱)(۲-x)} \qquad x \in [۱ \text{ و } ۲]$$

$$(\frac{f}{g})\;(x) = \sqrt{\frac{x-۱}{۲-x}} \qquad x \in [۱ \text{ و } ۲[$$

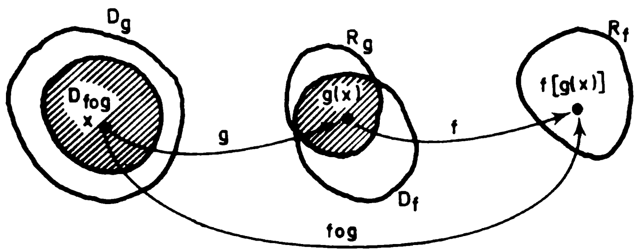
II- ترکیب دو تابع فرض کنید f و g توابعی حقیقی با دامنه‌های D_f و D_g و بردهای R_f و R_g باشند. منظوراز ترکیب f و g که آن را با fog (بخوانید f اُ g یا f دایـره g) نشان میدهند تابعی است که دامنه تعریف آن:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

و بصورت زیر تعریف میشود:

$$(fog)(x)=f[g(x)] \quad \text{و} \quad x\in D_{fog}$$

تابع fog را یك تابع مرکب یا **تابع تابع** نیز می‌نامند شکل زیر ترکیب دو تابع f **و** g را در حالت کلی توصیف می‌کند:



مثال ۱: توابع f و g در R به‌صورت $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=۲-x$ تعریف شده‌اند. بدون محاسبه fog و gof دامنهٔ تعریف آنها را بدست‌آورید سپس fog و gof رامحاسبه کنید.

حل: داریم:

$$D_f=\{x \mid x\geqslant -۱ \ \text{و}\ x\in R\}=[-۱ \ \text{و}\ +\infty) \quad D_g=R$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

بنا براین:

$$D_{gof}=\{x\geqslant -۱ \mid \sqrt{x+۱}\in R\}=[-۱ \ \text{و}\ +\infty)$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$D_{fog}=\{x\in R \mid ۲-x\geqslant -۱\}=(-\infty \ \text{و}۳]$$

وهمچنین:

$$gof(x)=g[f(x)]=۲-f(x)=۲-\sqrt{x+۱} \qquad \forall x\in[-۱ \ \text{و}\ +\infty)$$

$$fog(x)=f[g(x)]=\sqrt{g(x)+۱}=\sqrt{(۲-x)+۱}=\sqrt{۳-x}$$

$$\forall x\in(-\infty \ \text{و}\ ۳]$$

توجه: از این‌مثال دیده میشود که درحالت‌کلی لازم نیست داشته باشیم: $fog = gof$.
در این مثال نه تنها دامنه‌های fog و gof برابر نیستند، بلکه حتی مقادیر fog و gof روی مقطع دامنه‌هایشان یعنی [۳ و ۱ −] نیز مساوی نیستند. این نشان میدهد که عمل ترکیب‌دو تابع روی مجموعهٔ توابع یک‌عمل جابجائی نیست.

مثال۲: تابعهای $f(x) = ۳x - ۱$ و $g(x) = ۲x + ۱$ و $h(x) = ۵x + ۲$ داده‌شده‌اند. مطلوب است تعیین‌تابع‌های مرکب: ho(gof) و (hog)of آیا این دوتابع مساوی‌اند؟

حل ــ دامنه‌های همهٔ توابع مجموعهٔ R است و داریم:

$$(gof)(x) = g[f(x)] = ۲(۳x - ۱) + ۱ = ۶x - ۱ = z(x)$$

$$(ho(gof))(x) = h[z(x)] = ۵(۶x - ۱) + ۲ = ۳۰x - ۳$$

$$(hog)(x) = h[g(x)] = ۵(۲x + ۱) + ۲ = ۱۰x + ۷ = z_۱(x)$$

$$((hog)of)(x) = (z_۱of)(x) = z_۱[f(x)] = ۱۰(۳x - ۱) + ۷ = ۳۰x - ۳$$

پس ho(gof) و (hog)of با یکدیگر مساوی‌اند.

۱ـ۱۰ـ تابع معکوس

اگر تابع f با دامنهٔ تعریف D_f و بُرد R_f یك به یك باشد.

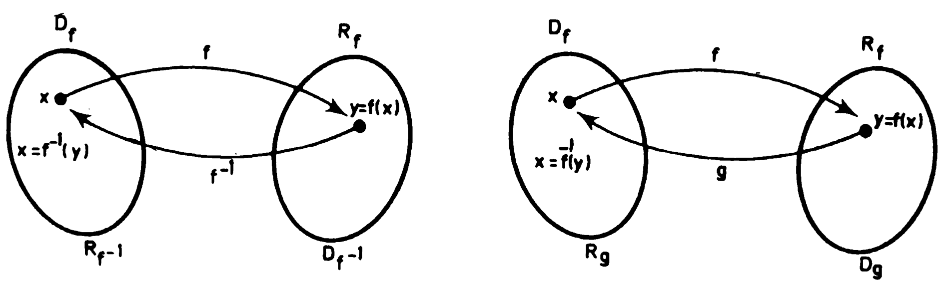
اولاً: بازاء هر $x \in D_f$ یك و تنها یك $y \in R_f$ وجود دارد بقسمی که $(x \text{ و } y) \in f$ است.

ثانیاً: بازاء هر $y \in R_f$ یك و تنها یك $x \in D_f$ وجود دارد بقسمی که $(x \text{ و } y) \in f$ است.

حال اگر رابطهٔ :

$$g = \{(y \text{ و } x) | (x,y) \in f\} \subseteq R_f \times D_f$$

را درنظر بگیریم این رابطه بنابرقسمت ثانیاً تابع g را تعریف می‌کند که دامنهٔ تعریف‌آن برد f و برد آن دامنهٔ تعریف f است این تابع g را تابع معکوس f می‌خوانند و آنرا به $f^{-۱}$ نمایش می‌دهند. بنابراین :



$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-۱}(y)$$

توجه:

۱ـ اگر f^{-1} معکوس f باشد f هم معکوس f^{-1} خواهد بود.

۲ـ معکوس تابعی که یك به‌یك نباشد تعریف نشده است.

قضیه اساسی ـ هرگاه f در فاصلهٔ بستهٔ [a و b] اکیداً صعودی و پیوسته باشد، f^{-1} در [f(a) و f(b)] اکیداً صعودی و پیوسته‌است. چنانچه f در[a و b] اکیداً نزولی و پیوسته باشد، f^{-1} در[f(a) و f(b)] اکیداً نزولی و پیوسته است.

برای بدست‌آوردن دستور f^{-1} (معکوس تابع f)، ازدستور $y=f(x)$ مقدار x را برحسب y تعیین می‌کنیم تا $x=f^{-1}(y)$ به دست‌آید در تابع اخیر y متغیر مستقل و x متغیر وابسته است وچون معمولا x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌گیرند جای y و x را عوض می‌کنیم تا $y=f^{-1}(x)$ به‌دست آید.

مثال۱ـ تابع $y=f(x)=۲x-۴$ مفروض است. هرگاه x در فاصله [۳ و ۰] تغییر کند:

الف: تابع معکوس تابع f را تعیین و دامنهٔ تعریف و برد آنرا بدست آورید.

ب: نمودار دوتابع را دریك دستگاه مختصات رسم کنید.

حل: چون $y'=f'(x)=۲>۰$ مثبت است f تابعی است اکیداً صعودی و پیوسته، پس معکوس دارد.

و چون، $D_f=[۰ \text{ و } ۳]$

پس داریم: $R_f=[f(۰) \text{ و } f(۳)]=[-۴ \text{ و } ۲]$

از $y=۲x-۴$ ، x را برحسب y حساب می‌کنیم.

(y متغیر مستقل و x متغیر وابسته) $x=\dfrac{y}{۲}+۲$

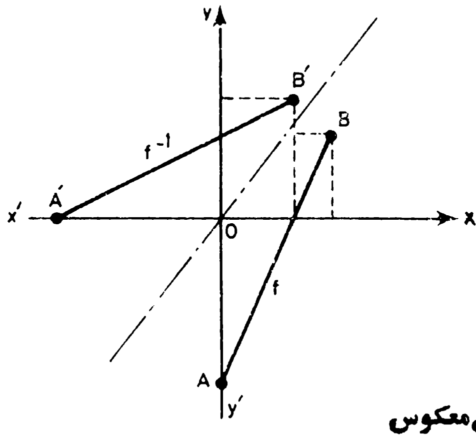
و با تعویض x و y، $y=f^{-1}(x)=\dfrac{x}{۲}+۲$

معکوس تابع f بدست می‌آید. دامنه وبرد f^{-1} برابر است با:

$$D_{f^{-1}}=R_f=[-۴ \text{ و } ۲]$$

$$R_{f^{-1}}=D_f=[۰ \text{ و } ۳]$$

در نمودار زیر دونقطه $A(۰ \text{ و } -۴)$ و $B(۳ \text{ و } ۲)$ از خط اول و دو نقطه متناظر آنها $A'(-۴ \text{ و } ۰)$ و $B'(۲ \text{ و } ۳)$ از خط دوم اختیار شده‌اند.



I- خواص تابع معکوس

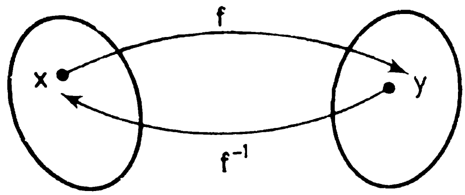
الف: f^{-1} یکنوا است. یعنی اگر f صعودی باشد f^{-1} هم صعودی است و اگر f نزولی باشد f^{-1} هم نزولی است. بطور کلی جهت تغییرات f^{-1} همان جهت تغییرات f است.

ب : اگر f پیوسته باشد f^{-1} نیز پیوسته است.

ج: ترکیب دو تابع f و f^{-1} یك تابع همانی است:

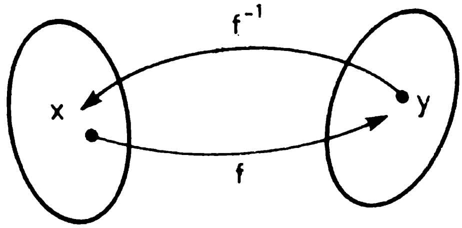
با توجه به طرح زیر داریم: $f^{-1}of(x)=f^{-1}[f(x)]=f^{-1}(y)=x=I_{[a,b]}(x)$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^{-1}of"'] & y \arrow[r, mapsto, "f^{-1}"] & x \end{tikzcd}$$



($I_{[a\text{ و }b]}$ تابع همانی فاصله [a و b] است) و بهمین ترتیب:

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, mapsto, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "fof^{-1}"'] & x \arrow[r, mapsto, "f"] & y \end{tikzcd}$$



$$fof^{-1}(y)=f[f^{-1}(y)]=f(x)=y=I_{[F(a),F(b)]}(y)$$

($I_{[f(a)\text{ و }f(b)]}$ تابع همانی فاصله [f(a) و f(b)] است)

دیده میشود که این دو تابع با یکدیگر مساوی نیستند.

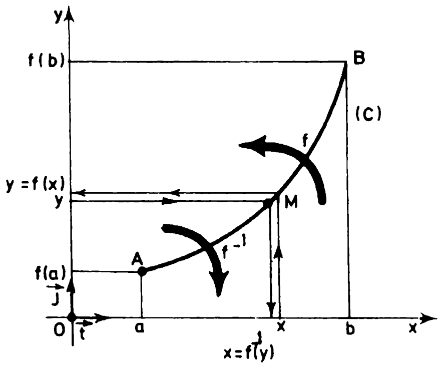
II- نمودار تابع معکوس - اگر (C) منحنی نمایش تابع حقیقی f در دستگاه محورهای مختصات متعامد باشد. بنابرهم ارزی :

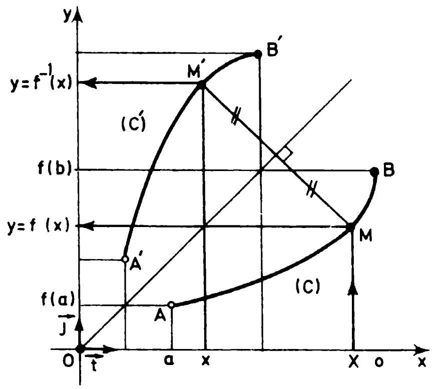
$$y=f(x) \iff x=f^{-1}(y)$$

منحنی (C) با تعویض نقش x و y (y متغیر و x تابع آن) نمودار هندسی تابع f^{-1} نیز هست برای آنکه به طرز نمایش معمولی برگردیم کافی است، x و y را بحالت اول برگردانیم طوری

که در f^{-1}، x متغیر و y نمایش مقادیری باشد که این تابع اختیار می‌کند.

در این‌صورت (C') نمایش تابع $y = f^{-1}(x)$ قرینه (C) نسبت به نیمساز زوایای ربع اول وسوم‌است. زیرا نقاط $M(x$ و $y)$ و $M'(y$ و $x)$ نسبت به نیمساز زوایای ربع اول وسوم قرینه‌اند.

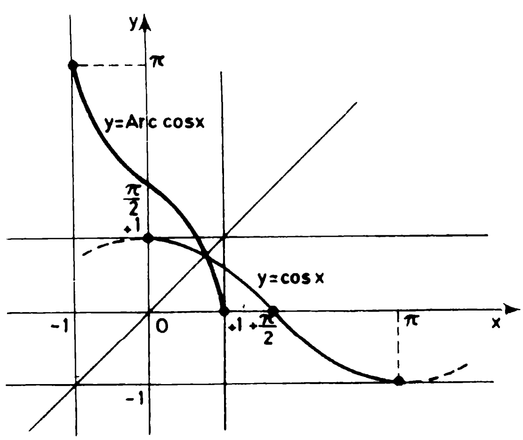




مثلا: تابع $y = \cos x$ روی R پیوسته و روی $[\pi$ و $0]$ اکیداً نزولی‌است. بنابراین دارای یك تابع معکوس می‌باشد که به $y = \mathrm{Arc}\cos x$ نشان داده می‌شود.

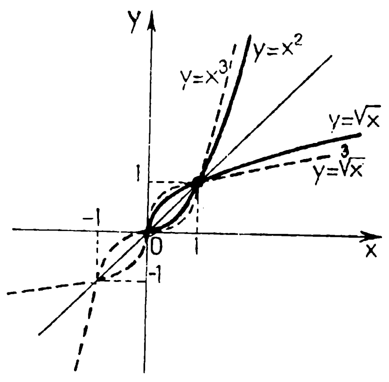
$$\begin{cases} y = \cos x \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \mathrm{Arc}\cos y \\ y \in [-1, 1] \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} y = \mathrm{Arc}\cos x \\ x \in [-1, +1] \end{cases}$$

منحنی نمایش تابع $y = \mathrm{Arc}\cos x$ و $x \in [-1, +1]$ قرینه نمایش تابع $y = \cos x$ و $x \in [0, \pi]$ نسبت به‌نیمساز ربع اول است.



منحنی‌های نمایش تابع‌های $y = \sqrt[n]{x}$

منحنی نمایش تابع‌های (ریشه n ام) همان قرینه های منحنی‌های مربوط به توابع توان $y = x^n$ نسبت به‌نیمساز زاویه ربع اول می‌باشند. درشکل زیرمنحنی‌نمایش $y = \sqrt{x}$ و $y = \sqrt[3]{x}$ نشان‌داده شده‌است.



توجه: بعضی ازتوابع هستندکه معکوس‌پذیرند اما ضابطه تابع معکوس‌آنها را نمی‌توان بدست آورد. ولی با استفاده از این خاصیت می‌توان نمودار تابع معکوس آنها را رسم‌نمود.

مثال ۱: تابع f در R باضابطه $f(x) = x^3 + x + 1$ مفروض است. بدون به‌دست‌آوردن ضابطه تابع معکوس، نمودار هندسی تابع معکوس آن رارسم کنید.

حل: دامنه تعریف تابع f مجموعه اعداد حقیقی R است وچون $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ همواره مثبت و تابع f هم پیوسته است تابع f در دامنه تعریفش اکیداً صعودی بوده ومعکوس‌پذیر است، نمودار تابع معکوس قرینه نمودار تابع f نسبت به نیمساز ربع اول است.

$f(x) = x^3 + x + 1$ $\quad\quad f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

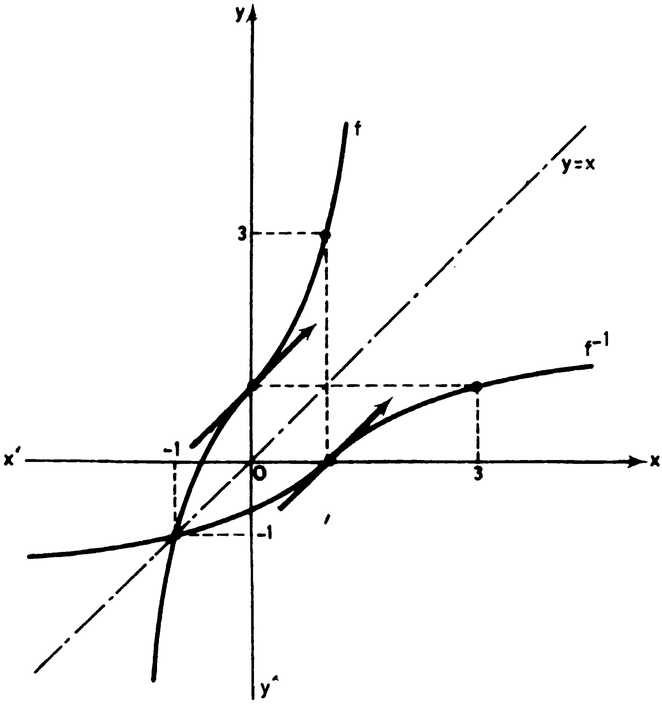
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\quad\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f(0) = 1$ $\quad\quad f'(0) = 1$ و $f''(0) = 0$

$f(1) = 3$ $\quad\quad f'(1) = 4$

$f(-1) = -1$ $\quad\quad f'(-1) = 4$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+		+		+		+	
y	$-\infty$	↗	-1	↗	1	↗	3	↗	$+\infty$



تمرین

۱ـ فرض کنید $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{x+۱}$ باشد، fog و gof را تعیین و آنها را با هم مقایسه کنید.

۲ـ توابع زیر مفروض‌اند:

$$f(x)=\frac{۲x}{x+۱} \text{ و } g(x)=x+۲ \text{ و } h(x)=۴x-۱$$

مطلوبست تعیین تابعهای مرکب $z_{۱}=[(gof)oh](x)$ و $z_{۲}=[go(foh)](x)$ و تحقیق اینکه $z_{۱}=z_{۲}$ است.

۳ـ تابعهای f و g در R با ضابطه‌های $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$ و $g(x)=\frac{۳}{x+۴}$ تعریف شده‌اند.

الف ـ دامنه تعریف f و g و fog و gof را بیابید.

ب ـ gof و fog را محاسبه کنید.

۴ـ تابعهای $f(x)=۴x^۲-۱$ و $g(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ مفروضند تابعهای $f\pm g$ و $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را بسازید و دامنه تعریف هریك را بیابید.

۵ـ تابع $f(x)=x-\sqrt{x^۲-۲x}$ با دامنه $D_f=[۲ \quad + \infty[$ و $g(x)=\frac{x^۲}{۲x-۲}$ مفروض‌اند نشان دهید $gof(x)=x$ می‌باشد.

۶ـ تابع معکوس تابع f با ضابطه $a\neq ۰$ و $f(x)=ax+b$ را معین کنید.

۷ـ تابعهای f و g در R با ضابطه‌های $f(x)=۲x+۳$ و $g(x)=۳x-۵$ مفروضند.

اولا: $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ و $(gof)^{-۱}$ را تعیین نمائید.

ثانیاً: نشان دهید که $(gof)^{-۱}=f^{-۱}og^{-۱}$ است.

ثالثاً: $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$.

۸ـ نشان دهید که تابع f باضابطهٔ $f(x)=۲+\sqrt[۳]{x}$ روی R معکوس‌پذیر است ضابطهٔ تابع معکوس آنرا بیابید.

۹ـ نشان دهیدتابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۲x+۱}{x+۱}$ در فاصله $[۰ و ۱]$ معکوس پذیر است. ضابطهٔ تابع معکوس آنرا بیابید.

۱۰ـ معکوس پذیری هریك از توابع زیر را بررسی، سپس ضابطهٔ تابع معکوس آنها را بیابید.

الف : $x\in[۰و۱]$ $\quad x \xrightarrow{f} f(x)=x^۴-۲x^۲$

ب : $x\in[۱و+\infty[$ $\quad x \xrightarrow{f} f(x)=|x-۱|$

ج : $x\in[۱و+\infty[$ $\quad x \xrightarrow{f} f(x)=x^۲-۲x$

د : $x\in[۰و+\infty[$ $\quad x \xrightarrow{f} f(x)=۳x+|x|$

۱۱ـ دامنهٔ تعریف وبرد تابع $y\geqslant ۰$ و $x\geqslant ۰$ ، $۴x^۲+y^۲=۱۶$ رابدست آورده وتابع معکوس آنرا تعیین کنید.

۱۲ـ تابع $x>۱$ و $f(x)=\sqrt{x^۳-۱}$ مفروض است $f^{-۱}$ را تعیین و سپس $f^{-۱}of$ و $fof^{-۱}$ را باهم مقایسه کنید.

فصل دوم

حد

۲-۱- مقدمه

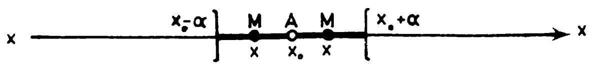
برای تعریف حد تابع درحالت کلی به‌سه تعریف زیرنیاز داریم:

الف- می‌گوئیم متغیر x به سمت $x_\circ$ میل می‌کند ومی‌نویسیم: $x \to x_\circ$، در صورتیکه‌فاصلهٔ نقطهٔ x تا نقطهٔ $x_\circ$ یعنی $|x-x_\circ|$ مثبت بوده و از هرعدد مثبت کوچك α (هراندازه کوچك که بخواهیم) کوچکتر شود.

$$x \to x_\circ \quad \text{یعنی} \quad \circ < |x-x_\circ| < \alpha$$

$$x \to x_\circ \quad \text{یعنی} \quad (x_\circ - \alpha < x < x_\circ + \alpha \ \text{و}\ x \neq x_\circ)$$

$$x \to x_\circ \quad \text{یعنی} \quad x \in]x_\circ - \alpha \ \text{و}\ x_\circ + \alpha[- \{x_\circ\}$$



(فاصله $]x_\circ - \alpha, x_\circ + \alpha[- \{x_\circ\}$ راهمسایگی بدون مرکز $x_\circ$ به شعاع α می‌نامند.)

ب- اگر مقادیر متغیر x از هرعدد مثبت بزرگی بزرگتر شود، می‌گوئیم x به‌سمت باضافه بینهایت میل می‌کند و این مطلب را به‌اختصارچنین نشان می‌دهیم: $x \to +\infty$.

$$\forall M > \circ \ ، x > M \Rightarrow x \longrightarrow +\infty$$

توجه کنیدکه $+\infty$ یك عدد نیست و $x \to +\infty$ فقط یك نماد بـرای نشان دادن مفهوم فوق است.

ج- اگر مقادیر x ازهرعدد منفی کوچکی کوچکترشود ، می‌گوئیم x به‌سمت منهای بینهایت میل می‌کند و می‌نویسیم: $x \to -\infty$.

$$\forall M > \circ \ ، \ x < -M \Rightarrow x \longrightarrow -\infty$$

توجه کنیدکه روی محور اعداد حقیقی جائی بنام $-\infty$ نداریم و $x \to -\infty$ فقط نمادی برای نشان دادن مفهوم بالا است.

۲-۲- حد تابع

اکنون تابع f و فاصلهٔ باز I و نقطهٔ $x_\circ$ از این فاصله را درنظرمی‌گیریم و فرض می‌کنیم که f در I (مگر محتملا در $x_\circ$) تعریف شده است . می‌گوئیم: حد تابع f وقتی که x به‌سمت $x_\circ$ میل کند عدد (حقیقی) L است و می‌نویسیم :

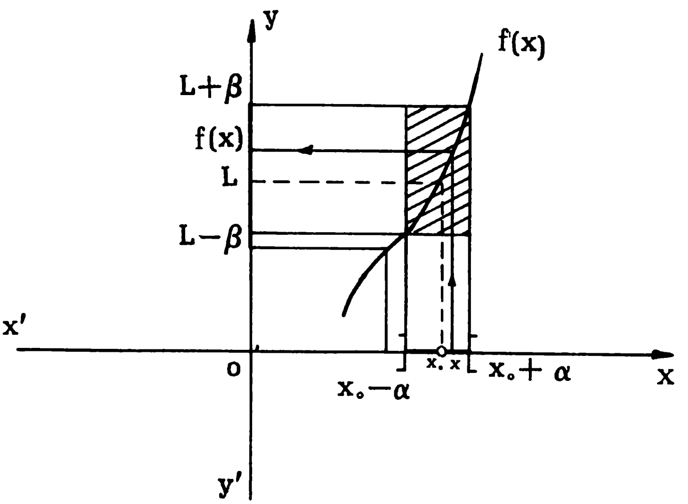
$$\lim_{x \to x_\circ} f(x) = L \quad (\text{حد})$$

هرگاه به‌ازای هرعدد مثبت β عدد مثبتی مانند α (معمولا به β بستگی دارد) وجـود داشته باشد به قسمی که داشته باشیم:

$$(I) \quad 0 < |x - x_0| < \alpha \text{ و } x \in D_f \Longrightarrow |f(x) - L| < \beta$$

در تعریف فوق β و α دو عدد مثبت‌اند که هر اندازه بخواهیم می‌توانیم آنها را کوچك اختیارکنیم. ابتدا باید β را اختیارکنیم وسپس ثابت‌کنیم لااقل‌یك α که‌معمولا به β بستگی‌دارد پیدا می‌شودکه استلزام بالا صحیح باشد.

D_f دامنهٔ تعریف تابع است وبدیهی است‌که x باید متعلق به دامنه باشد تا $f(x)$ تعریف شده باشد. از این رو گاهی اوقات در استلزام فوق از نوشتن شرط $x \in D_f$ خودداری می‌کنیم ولی استنباط چنین خواهدبودکه همواره x به D_f متعلق است. علاوه براین همانطورکه درتعریف $x \to x_0$ دیدیم x نباید برابر x_0 اختیار شود.



معمولاً برای مختصر و ساده نویسی، تعریف $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ حد، را به‌صورت نمادی زیر می‌نویسند. (نماد «$\ni$» خوانده می‌شود: به‌قسمی‌که یا به‌طوریکه).

$$\forall \beta > 0 \quad \exists \alpha > 0 \ni \quad 0 < |x - x_0| < \alpha \text{ و } x \in D_f \Longrightarrow |f(x) - L| < \beta$$

۲-۳- نکات قابل توجه درحد

اگرتابع f وقتی x به‌سمت x_0 میل‌کند حد داشته‌باشد، نکات زیر را باید درنظر داشت :

الف- اگر L حد f باشد، L عددی است حقیقی و یگانه (یگانگی آن‌را در اینجا ثابت نمی کنیم.)

ب- گفتن اینکه $f(x)$ به سمت L میل می کند به تنهائی هیچ معنـــی ندارد، مگـــر اینکه بگوئیم $f(x)$ به سمت L میل می کند وقتی که x به‌سمت مثلا $x_\circ$ میل کند.

پ- تعریف $\lim_{x\to x_\circ} f(x) = L$ حد، هم‌ارز است با اینکه بگوئیم بـــه ازای هر $\beta>\circ$ یك $\alpha>\circ$ وجود دارد بطوریکه اگر $x\neq x_\circ$ متعلق به‌فاصلهٔ باز $]x_\circ-\alpha, x_\circ+\alpha[$ و دامنهٔ تعریف f باشد، آنوقت مقدار f در این x به‌فاصلهٔ باز $]L-\beta, L+\beta[$ متعلق باشد. توجه‌کنیدکه حد f به‌مقادیر نزدیك به $x_\circ$ بستگی دارد نه‌به‌خود $x_\circ$. ممکن است $f(x_\circ)$ اصلا تعریف نشده باشد ویادرصورت تعریف شدن با L مساوی نباشد. مثلا حد تابـــع $f(x)=\frac{x^\text{۲}}{x}$ وقتی $x\to\circ$ مساوی با صفراست در صورتیکه $f(\circ)$ معنی ندارد.

ت- برای آنکه نشان دهیم $\lim_{x\to x_\circ} f(x) = L$ حد، باید $\beta>\circ$ را به دلخواه انتخاب کنیم ویك $\alpha>\circ$ به دست‌آوریم که در تعریف حد صدق‌کند. α معمولا منحصر به فرد نیست و اگـــر $\alpha_\circ$ در تعریف صادق باشد هرعدد α، $\circ<\alpha\leqslant\alpha_\circ$ نیز در تعریف صدق خواهد کرد.

مثال ۱- می‌خواهیم با استفاده از تعریف حد ثابت کنیم حد تابع :

$$f(x)=\begin{cases}\text{۲}x-\text{۳} & \text{اگر } x\neq-\text{۱} \\ \text{۲} & \text{اگر } x=-\text{۱}\end{cases}$$

وقتی x به سمت ۱ – میل کند برابر ۵ – است.

حل- باید ثابت‌کنیم‌که به‌ازای هر $\beta>\circ$ یك $\alpha>\circ$ وجود دارد به‌قسمی که:

$$\circ<|x-(-\text{۱})|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-(-\text{۵})|<\beta$$

چون $|x+\text{۱}| = |x-(-\text{۱})| >\circ$ بدین معنی است که $x\neq-\text{۱}$ پس $f(x)=\text{۲}x-\text{۳}$ و استلزام فوق به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\circ<|x+\text{۱}|<\alpha \Longrightarrow |(\text{۲}x-\text{۳})-(-\text{۵})|<\beta$$

ویا :

$$\circ<|x+\text{۱}|<\alpha \Longrightarrow \text{۲}|x+\text{۱}|<\beta$$

ویا :

$$\circ<|x+\text{۱}|<\alpha \Longrightarrow |x+\text{۱}|<\frac{\beta}{\text{۲}}$$

بنابراین‌کافیست که $\alpha>\circ$ راکوچکتر از $\frac{\beta}{\text{۲}}$ یا مساوی آن اختیار کنیم ، تا استلزام درست

زیر به دست آید.

$$\circ < |x+1| < \frac{\beta}{2} \Longrightarrow |(2x-3)-(-5)| < \beta$$

توجه کنید که در این مثال $f(-1) = 2$ است در حالیکه $\lim_{x\to -1} f(x) = -5$، پس بطور کلی لازم نیست که حد تابع در یک نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه باشد.

مثال ۲- تابع $f(x) = ax + b$ را که در آن a و b دو عدد حقیقی و ثابت هستند در نظر می‌گیریم. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که حد f وقتی که $x \to x_\circ$ برابر $f(x_\circ) = ax_\circ + b$ می‌باشد. یعنی:

$$\lim_{x\to x_\circ} (ax+b) = ax_\circ + b$$

حل- حالت اول $a = \circ$. باید ثابت کنیم:

$$\lim_{x\to x_\circ} (b) = b$$

بنا به‌تعریف باید نشان دهیم:

$$\forall\beta>\circ \quad \exists\alpha>\circ \ni \circ<|x-x_\circ|<\alpha \Longrightarrow |f(x)-b|<\beta$$

یا :

$$\forall\beta>\circ \quad \exists\alpha>\circ \ni \circ<|x-x_\circ|<\alpha \Longrightarrow |b-b|<\beta$$

اما $|b-b| = \circ$ و از هر $\beta>\circ$ کوچکتر است پس هر $\alpha>\circ$ در تعریف صدق می‌کند.

حالت دوم $a\neq\circ$. بنابه تعریف باید نشان دهیم:

$$\forall\beta>\circ \ \exists\alpha>\circ \ni \circ<|x-x_\circ|<\alpha \Longrightarrow |(ax+b)-(ax_\circ+b)|<\beta$$

یا :

$$\forall\beta>\circ \quad \exists\alpha>\circ \ni \circ<|x-x_\circ|<\alpha \Longrightarrow |a(x-x_\circ)|<\beta$$

یا :

$$\forall\beta>\circ \quad \exists\alpha>\circ \ni \circ<|x-x_\circ|<\alpha \Longrightarrow |x-x_\circ|<\frac{\beta}{|a|}$$

بنابراین کافیست α را مثبت و کوچکتر از $\frac{\beta}{|a|}$ یا مساوی آن اختیار کنیم تا تعریف برقرار شود. در حقیقت اگر $\circ<|x-x_\circ|<\frac{\beta}{|a|}$ آنوقت $|a|\,|x-x_\circ|<\beta$ ویا $|a(x-x_\circ)|<\beta$ ویا $|(ax-b)-(ax_\circ-b)|<\beta$ که حکم مورد نظر است.

۲-۴- حد در بینهایت و حدهای بینهایت

تاکنون درمورد $\lim_{x\to x_\circ} f(x)=L$ حد، که درآن نه $x_\circ$ و نه L بینهایت بودند بحث کرده‌ایم.

ولی حالتهائی وجود دارد که در آنها $x_\circ$ یا L یا هر دو متفقاً $+\infty$ یا $-\infty$ و یا ∞ هستند. حالتی راکه‌هم $x_\circ$ وهم L اعداد حقیقی هستند دیده‌اید. اکنون یکی ازحالتها راطرح وبرای آن مثالی می‌زنیم، سپس همهٔ حالتها را درجدولی خلاصه‌می‌کنیم تا مراجعه به آن‌آسان باشد.

تعریف- فرض‌کنیدکه تابع f برای هر $x>a$ تعریف شده باشد،که درآن a عددی است حقیقی. گوئیم وقتی x به‌سمت $+\infty$ میل‌کند حد f عدد حقیقی L است ومی‌نویسیم:

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}} f(x)=L$$

هرگاه به ازای هر $\beta>\circ$ لااقل‌یك $M>\circ$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که:

$$x\in D_f \text{ و } x>M \Longrightarrow |f(x)-L|<\beta$$

یا بطور نمادی:

$$\forall\beta>\circ \;\; \exists M>\circ \;\; \ni \;\; x>M \text{ و } x\in D_f \Longrightarrow |f(x)-L|<\beta$$

مثال- ثابت کنیدکه:

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}} \frac{۳x+۲}{۲x-۴}=\frac{۳}{۲}$$

حل- باید نشان دهیم‌که:

$$\forall\beta>\circ \;\; \exists M>\circ \;\; \ni x>M \Longrightarrow \left|\frac{۳x+۲}{۲x-۴}-\frac{۳}{۲}\right|<\beta$$

فرض می‌کنیم طرف دوم‌گزاره فوق درست باشد. اکنون سعی می‌کنیم به‌کمك‌آن M را حدس بزنیم و سپس حدس خود را امتحان خواهیم کرد. اما نامساوی طـرف دوم‌گزاره فوق را می‌توان چنین نوشت:

$$\left|\frac{۳x+۲}{۲x-۴}-\frac{۳}{۲}\right| = \left|\frac{۸}{(۲x-۴)}\right|=\frac{۸}{|۲x-۴|}<\beta$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$|۲x-۴|>\frac{۸}{\beta} \qquad \text{یا} \qquad x-۲>\frac{۴}{\beta} \qquad \text{یا} \qquad x>۲+\frac{۴}{\beta}$$

بنابراین‌کافی است‌که M را بزرگتر یا مساوی $۲+\frac{۴}{\beta}$ اختیار کنیم. یعنی اگر $M\geqslant ۲+\frac{۴}{\beta}$ باشد خواهیم‌داشت:

$$x>(۲+\frac{۴}{\beta}) \Longrightarrow \left|\frac{۳x+۲}{۲x-۴}-\frac{۳}{۲}\right|<\beta$$

بنابراین اگر $x>۲+\frac{۴}{\beta}$ باشد می‌توان نوشت :

$$x>۲+\frac{۴}{\beta}$$

$$x-۲>\frac{۴}{\beta}$$

$$\frac{x-۲}{۴}>\frac{۱}{\beta}$$

چون $\frac{۱}{\beta}>۰$ است ، $\frac{x-۲}{۴}>۰$ بوده:

$$\left|\frac{x-۲}{۴}\right|>\frac{۱}{\beta}$$

$$\left|\frac{۴}{x-۲}\right|<\beta$$

$$\left|\frac{۳}{۲}+\frac{۴}{x-۲}-\frac{۳}{۲}\right|<\beta$$

$$\left|\frac{۳x-۶+۸}{۲x-۴}-\frac{۳}{۲}\right|<\beta$$

$$\left|\frac{۳x+۲}{۲x-۴}-\frac{۳}{۲}\right|<\beta$$

پس:

$$x>۲+\frac{۴}{\beta}\Longrightarrow\left|\frac{۳x+۲}{۲x-۴}-\frac{۳}{۲}\right|<\beta$$

۲-۵- جدول حد درحالتهای مختلف

تمام حالتهای **مختلف** حد در بینهایت و حد های بینهایت در جدول صفحه بعد تنظیم شده که برای خواندن هر سطر نمادهای آن سطر را به ترتیب به جای سه نقطه‌های ابتدای جدول (ازبالا) قرار داده وعبارت حاصل رااز چپ‌به‌راست می‌خوانیم. مثلاسطرهفتم‌راچنین‌می‌خوانیم.

وقتی x به‌سمت $+\infty$ میل‌کند $f(x)$ به‌سمت $-\infty$ میل خواهد کـرد هرگاه برای هر $N>۰$ یك $M>۰$ وجود داشته باشد به‌قسمی‌که ازنامساوی $x>M$ نامساوی $f(x)<-N$ نتیجه شود.

تذکر: وقتی x به‌سمت $x_۰^+$ میل می‌کندحد $f(x)$ برابر $+\infty$ یا $(-\infty)$ است به‌صورت $\lim\limits_{x\to x_۰^+} f(x)=+\infty$ یا $(-\infty)$ حد، و همچنین وقتی x به‌سمت $x_۰^-$ میل‌کندحد $f(x)$ برابر $(+\infty)$

یا $-\infty$ است به‌صورت $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ یا $(+\infty)$ حد، بعضی ازمؤلفین این دو مسئله رایك جا به صورت $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$ حد، می‌نویسند و می‌گویند وقتی x به سمت x_0 میل می کند حد $|f(x)|$ برابر $+\infty$ است (سطر چهارم جدول).

تذکر: وقتی x به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند حد $f(x)$ برابر L است به‌صورت $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$ حد و

همچنین وقتی x به‌سمت $-\infty$ میل می کند حد $f(x)$ برابر L است به‌صورت $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ حد،

بعضی از مؤلفین این دومسئله را یك‌جا به‌صورت $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$ حد، می‌نویسند ومی‌گویند وقتی x به سمت ∞ میل می کند حد $f(x)$ برابر L است (سطر یازده جدول).

جدول تعریف حدتابع $f:x\to f(x)$

وقتی x به‌سمت ... میل کند	$f(x)$ به سمت ... میل خواهد کرد	هرگاه برای هر...	یك...وجود داشته باشد	به قسمی که از نامساوی...	نامساوی ... نتیجه شود
x_0	L	$\beta>0$	$\alpha>0$	$0<\|x-x_0\|<\alpha$	$\|f(x)-L\|<\beta$
x_0	$+\infty$	$N>0$	$\alpha>0$	$0<\|x-x_0\|<\alpha$	$f(x)>N$
x_0	$-\infty$	$N>0$	$\alpha>0$	$0<\|x-x_0\|<\alpha$	$f(x)<-N$
$+\infty$	L	$\beta>0$	$M>0$	$x>M$	$\|f(x)-L\|<\beta$
$+\infty$	$+\infty$	$N>0$	$M>0$	$x>M$	$f(x)>N$
$+\infty$	$-\infty$	$N>0$	$M>0$	$x>M$	$f(x)<-N$
$-\infty$	L	$\beta>0$	$M>0$	$x<-M$	$\|f(x)-L\|<\beta$
$-\infty$	$+\infty$	$N>0$	$M>0$	$x<-M$	$f(x)>N$
$-\infty$	$-\infty$	$N>0$	$M>0$	$x<-M$	$f(x)<-N$
∞	L	$\beta>0$	$M>0$	$\|x\|>M$	$\|f(x)-L\|<\beta$
∞	$+\infty$	$N>0$	$M>0$	$\|x\|>M$	$f(x)>N$
∞	$-\infty$	$N>0$	$M>0$	$\|x\|>M$	$f(x)<-N$

مثال- تابع f بوسیله دستور $f(x)=\frac{-1}{(x-3)^2}$ داده شده است. ثابت کنید که اگر x به سمت ۳ میل کند f(x) به‌سمت $-\infty$ میل خواهد کرد.

حل- بنا به سطر سوم جدول باید برای‌هر $N>0$ لااقل یك $\alpha>0$ بیابیم به‌قسمی که:

$$0<|x-3|<\alpha \Longrightarrow \frac{-1}{(x-3)^2}<-N$$

فرض می‌کنیم که طرف دوم گزاره فوق درست باشد حال سعی می‌کنیم به‌کمك آن α را حدس بزنیم و سپس حدس خود را امتحان خواهیم کرد. اما:

$$\frac{-1}{(x-3)^2}<-N \Longrightarrow \frac{1}{(x-3)^2}>N \Longrightarrow (x-3)^2<\frac{1}{N} \Longrightarrow |x-3|<\frac{1}{\sqrt{N}}$$

بنابراین دیده میشود که هرعدد مثبت کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{\sqrt{N}}$ رامی‌توان به‌عنوان α اختیار کرد. حال فرض کنید داشته باشیم $0<\alpha\leqslant\frac{1}{\sqrt{N}}$، در نتیجه:

$$0<|x-3|<\frac{1}{\sqrt{N}} \Longrightarrow 0<(x-3)^2<\frac{1}{N} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{(x-3)^2}>N \Longrightarrow \frac{-1}{(x-3)^2}<-N$$

یعنی جوابی که‌برای α حدس‌زده بودیم‌گزارهٔ شرطی فوق را به‌یك استلزام تبدیل می کندو اثبات‌کامل‌است امتحان‌جواب α به‌منظورروشن شدن‌مفهوم‌درس است‌وانجام‌آن‌همیشه ضرورت‌ندارد.

توجه- همانطور که مشاهده کرده‌اید سعی شده است که مثالهای ساده‌ای در مورد تعیین‌حد توابع بااستفاده از تعریف‌داده شود واین بدان سبب‌بوده است که بیشتر بامفهوم حدآشنا شوید. اصولا محاسبهٔ حد با استفاده از تعریف‌کار ساده‌ای نیست ومعمولا برای این محاسبات ازقضایای حد که بعداً درمورد آنها صحبت خواهیم کرد استفاده می‌شود بهمین سبب درزیرسعی شده است که تمرینهای ساده‌ای‌گنجانده شود.

تمرین:

تساویهای زیر را بااستفاده از تعریف حد ثابت کنید.

۱- $\underset{x\to 1}{\text{حد}} (-3x-1) = -4$

۲- $\underset{x\to 0}{\text{حد}} \left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$

۳- $\underset{x\to 1}{\text{حد}} (x^2-2x) = -1$

۴- $\underset{x\to 1}{\text{حد}} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

۵- $\underset{x\to 2}{\text{حد}} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$

۶- $\underset{x\to 1}{\text{حد}} \frac{1}{(x^2-1)^2} = +\infty$

۷- $\underset{x\to +\infty}{\text{حد}} \frac{5x-4}{x-1} = 5$

۸- $\underset{x\to +\infty}{\text{حد}} \sqrt{4x^2-1} = +\infty$

۹- $\underset{x\to +\infty}{\text{حد}} \left(-\sqrt{x^2-2x}\right) = -\infty$

۱۰- $\underset{x\to -\infty}{\text{حد}} \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 2$

۱۱- $\underset{x\to -\infty}{\text{حد}} \sqrt{x^2-4} = +\infty$

$$۱۲- \lim_{x \to -\infty} \sqrt[۳]{x^۳ + ۱} = -\infty$$

$$۱۳- \lim_{x \to \infty} \frac{۲x^۲ + ۴}{x^۲} = ۲$$

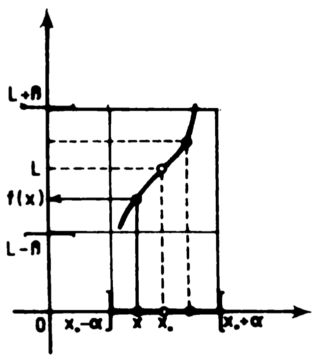
$$۱۴- \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^۲ - ۲x - ۱} = +\infty$$

$$۱۵- \lim_{x \to \infty} -\sqrt{x^۲ - ۴x + ۳} = -\infty$$

۲-۶- حد چپ و راست یک تابع

فرض کنید که تابع f در نقطهٔ x_0 دارای حدی برابر عدد L باشد. درنتیجه به‌ازای هر $\beta > 0$ یك $\alpha > 0$ موجود است به‌قسمی که:

$$0 < |x - x_0| < \alpha \text{ و } x \in D_f \Longrightarrow |f(x) - L| < \beta$$



از این تعریف چنین برمی‌آید که وقتی x به‌سمت x_0 میل کند، خواه از آن بزرگتر باشد خواه از آن کوچکتر، $f(x)$ درهر دوحالت به‌سمت L میل‌خواهدکرد پس داریم:

$$(۱) \quad x_0 < x < x_0 + \alpha \text{ و } x \in D_f \Longrightarrow |f(x) - L| < \beta$$

و

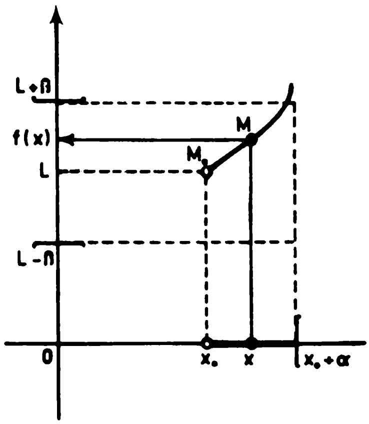
$$(۲) \quad x_0 - \alpha < x < x_0 \text{ و } x \in D_f \Longrightarrow |f(x) - L| < \beta$$

مطالب فوق ما را به تعریف زیرهدایت می‌کند.

تعریف- تابع f و نقطهٔ x_0 مفروضند.

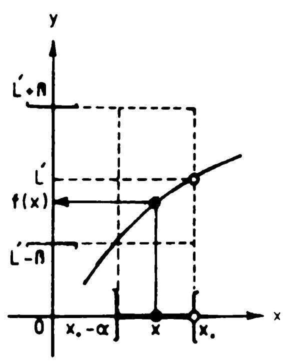
الف- فرض‌کنیدکه $a > x_0$ و f در فاصلهٔ $]x_0 \text{ و } a[$ تعریف شده باشد. گوئیم تابع f

در نقطهٔ x_0 دارای حد راست L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$ حد، هرگاه به ازای هر $\beta > 0$ یك $\alpha > 0$ موجود باشد به‌قسمی که:



$$x_0 < x < x_0 + \alpha \text{ و } x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L| < \beta$$

ب- فرض کنید که $a < x_0$ و f درفاصلهٔ باز $]a, x_0[$ تعریف شده باشد، گوئیم تابع f در نقطهٔ x_0 دارای حد چپ L' است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L'$ حد، هرگاه به‌ازای هر $\beta > 0$ یك $\alpha > 0$ موجود باشد به‌قسمی که:



$$x_0 - \alpha < x < x_0 \text{ و } x \in D_f \Rightarrow |f(x) - L'| < \beta$$

اگر تابع f درنقطهٔ x_0 دارای حد L باشدآنوقت استلزامهای (۱) و (۲) بالانشان‌می‌دهند که f در x_0 دارای حد راست وچپ بوده و این دوحد باهم مساوی و مساوی همان L می‌باشند. به‌عکس می‌توان دید (که ما دراینجا ازاثبات آن‌خودداری می‌کنیم) که اگر تابع f در x_0 دارای حد راست و حدچپ بوده واین دوحد بایکدیگر مساوی وبرابر L باشند آنوقت f در x_0 دارای حد L است. پس می‌توان گفت:

قضیهـ تابع f در x_0 دارای حد L است اگر و تنها اگر، f در x_0 دارای حد چپ و حد راست مساوی L باشد.

مثال۱ـ با استفاده از تعریف حد راست ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x-2} = 0$

حل ـ برای اثبات باید نشان دهیم که:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \ \alpha > 0 \ \ni \ 2 < x < 2+\alpha \Longrightarrow \left| \sqrt{x-2} - 0 \right| < \beta$$

و یا:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \ \alpha > 0 \ \ni \ 2 < x < 2+\alpha \Longrightarrow \sqrt{x-2} < \beta$$

و یا با مجذور کردن سمت راست استلزام اخیر:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \ \alpha > 0 \ \ni \ 2 < x < 2+\alpha \Longrightarrow 0 < x-2 < \beta^2$$

و یا:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \ \alpha > 0 \ \ni \ 2 < x < 2+\alpha \Longrightarrow 2 < x < 2+\beta^2$$

بنابراین دیده می‌شود که اگر $0 < \alpha \leqslant \beta^2$ اختیار شود استلزام فوق برقرار است.

مثال۲ـ با استفاده از تعریف حد چپ ثابت کنید که:

$$\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x} = 0$$

حل: برای اثبات باید نشان دهیم که:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \ \alpha > 0 \ \ni \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Longrightarrow \left| f(x) - L \right| < \beta$$

$$\forall \beta > 0 \ \exists \ \alpha > 0 \ \ni \ 1 - \alpha < x < 1 \Longrightarrow \left| \sqrt{1-x} - 0 \right| < \beta$$

$$\forall \beta > 0 \ \exists \ \alpha > 0 \ \ni \ 1 - \alpha < x < 1 \Longrightarrow \left| \sqrt{1-x} \right| < \beta$$

با مجذور کردن سمت راست استلزام اخیر خواهیم داشت:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \ \alpha > 0 \ \ni \ 1 - \alpha < x < 1 \Longrightarrow 0 < 1 - x < \beta^2$$

و یا:

$$\forall \beta > 0 \ \exists \ \alpha > 0 \ \ni \ 1 - \alpha < x < 1 \Longrightarrow 1 - \beta^2 < x < 1$$

بنابراین دیده میشود اگر $0 < \alpha \leqslant \beta^2$ اختیار شود استلزام فوق برقرار است.

$$1 - \beta^2 < x < 1 \Longrightarrow \left| \sqrt{1-x} - 0 \right| < \beta$$

قبل از پرداختن به مثال۳ توجه شمارا به این نکته جلب می کنیم که می‌توان‌تعاریفی شبیه به‌آنچه که‌درموردحد چپ وحد راست در x_0 بیان کردیم درموردحالت‌های ∞ و $\infty -$ و $L = +\infty$ نیز بیان کرد تعریف $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$، به‌طور نمادی چنین است:

$$\forall N > 0 \ \exists \ \alpha > 0 \ \ni \ x_0 - \alpha < x < x_0 \Longrightarrow f(x) > N$$

مثال۴: در تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ با استفاده از تعریف حد راست و حد چپ، ثابت کنید که:

الف: $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

ب: $\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$

حل_ الف: برای اثبات باید نشان دهیم که:

$$\forall N>0 \ \exists \alpha>0 \ \ni \ x_0<x<x_0+\alpha \Longrightarrow \frac{1}{x}>N$$

$$\forall N>0 \ \exists \alpha>0 \ \ni \ 0<x<0+\alpha \Longrightarrow \frac{1}{x}>N$$

$$0<x<\alpha \Longrightarrow \frac{1}{x}>N$$

فرض می‌کنیم طرف دوم گزاره فوق درست باشد. یعنی $\frac{1}{x}>N$ (چون N مثبت است x هم مثبت خواهد بود) طرفین نامساوی را معکوس می‌کنیم نتیجه می‌شود $0<x<\frac{1}{N}$ پس اگر هر عدد مثبت کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{N}$ را به عنوان α اختیار کنیم $0<\alpha\leqslant\frac{1}{N}$ استلزام فوق برقرار است.

$$0<x<\frac{1}{N} \Longrightarrow \frac{1}{x}>N$$

حل_ ب: برای اثبات باید نشان دهیم که:

$$\forall N>0 \ \exists \alpha>0 \qquad x_0-\alpha<x<x_0 \Longrightarrow f(x)<-N$$

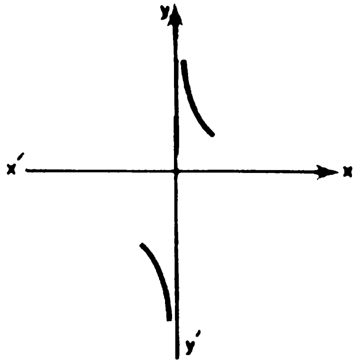
$$0-\alpha<x<0 \Longrightarrow \frac{1}{x}<-N$$

فرض می‌کنیم طرف دوم گزارهٔ فوق درست باشد. یعنی $\frac{1}{x}<-N$ (چون $-N$ منفی است، x هم منفی خواهد بود.) طرفین نامساوی را معکوس می‌کنیم نتیجه می‌شود $-\frac{1}{N}<x<0$ پس اگر هر عدد مثبت کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{N}$ را به عنوان α اختیار کنیم $0<\alpha\leqslant\frac{1}{N}$ و استلزام فوق برقرار است.

$$-\frac{1}{N}<x<0 \Longrightarrow \frac{1}{x}<-N$$

تذکر: توجه دارید تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ وقتی که x به‌سمت صفر میل می‌کند حد ندارد زیرا حد چپ و حد راست آن با هم مساوی نیستند.

وقتی x به‌سمت صفر میل می‌کند $|f(x)|$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند. منحنی نمایش این تابع در نزدیکی نقطهٔ صفر درزیر رسم شده است.



مثال۴ـ درتابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$. باستفاده ازتعریف حدثابت‌کنید:

$$\text{الف ـ} \lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty \qquad \text{ب ـ} \lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$$

حل ـ الف: برای اثبات حد راست باید نشان دهیم که:

$$\forall N>0 \qquad \exists \alpha>0 \qquad x_0<x<x_0+\alpha \implies f(x)>N$$

$$0<x<0+\alpha \implies \frac{1}{x^2}>N$$

فرض می‌کنیم طرف دوم گزارهٔ فوق درست باشد یعنی $\frac{1}{x^2}>N$ (چون N مثبت است)

طرفین نامساوی را معکوس می‌کنیم $0<x^2<\frac{1}{N}$ و از طرفین جذر می‌گیریم‌نتیجه میشود:

$$0<x<\frac{1}{\sqrt{N}} \qquad \text{یا} \qquad |x|<\frac{1}{\sqrt{N}}$$

پس اگر هر عدد مثبت‌کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{\sqrt{N}}$ را به‌عنوان α اختیارکنیم $0<\alpha\leqslant\frac{1}{\sqrt{N}}$

استلزام فوق برقرار است.

$$0<x<\frac{1}{\sqrt{N}} \implies \frac{1}{x^2}>N$$

حل ـ ب: برای اثبات حد چپ باید نشان دهیم که:

$$\forall N>0 \qquad \exists \alpha>0 \qquad x_0-\alpha<x<x_0 \implies f(x)>N$$

$$0-\alpha<x<0 \implies \frac{1}{x^2}>N$$

فرض می‌کنیم طرف دوم‌گزارهٔ فوق درست باشد یعنی $\frac{1}{x^2}>N$ (چون‌Nمثبت‌است)طرفین

نامساوی را معکوس می‌کنیم $0 < x^2 < \frac{1}{N}$ و از طرفین جذر می‌گیریم نتیجه‌میشود $|x| < \frac{1}{\sqrt{N}}$

و یا می‌توانیم بنویسیم : $x < \frac{1}{\sqrt{N}}$ یا $x > -\frac{1}{\sqrt{N}}$

و یا $-\frac{1}{\sqrt{N}} < x < 0$ پس اگر هر عدد مثبت کوچکتر یا مساوی $\frac{1}{\sqrt{N}}$ را به‌عنوان α اختیار کنیم $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}}$ استلزام فوق برقرار است.

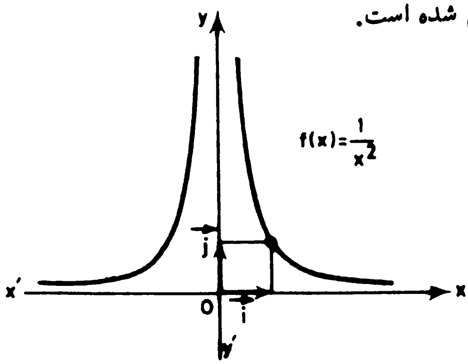
$$-\frac{1}{\sqrt{N}} < x < 0 \Longrightarrow \frac{1}{x^2} > N$$

تذکر– در اینجا نیز f درصفر تعریف نشده است و دامنهٔ تعریف تابع مجموعهٔ $R - \{0\}$ می‌باشد. خواه x مثبت باشد و خواه منفی و به‌سمت صفر میل کند، $f(x)$ بـه‌سمت $+\infty$ میـل خواهدکرد یعنی:

$$\underset{x \to 0^+}{\text{حد}} f(x) = +\infty$$

$$\underset{x \to 0^-}{\text{حد}} f(x) = +\infty$$

چون‌حدسمت‌چپ و حدسمت‌راست تابع مساوی‌هستند،پس‌تابع $\frac{1}{x^2}$ حد دارد ولی این حد با پایان نیست. به این سبب‌گاهی‌گفته می‌شود تابع حد ندارد یعنی حدباپایانی مانند L را ندارد درشکل نمودار تابع در نزدیکی نقطهٔ صفر رسم شده است.



نتیجه: در توابع گویا وقتی x به‌سمت ریشه ساده مخرج میل‌کند . حد چپ و حد راست تابع مساوی نیستند اگر یکی $+\infty$ باشد دیگـری $-\infty$ خواهد بود و برعکس . و وقتی x به‌سمت ریشه مضاعف مخرج میل کند حد چپ و حد راست تابـع مساویند . (یا هر دو $+\infty$ ویا هر دو $-\infty$ اند.)

۲-۷- دوتابع هم‌ارز

دو تابع f و g را در نظر می‌گیریم ، اگر این دو تابع در $x_\circ$ حد شان صفر بوده و بعلاوه $\lim_{x\to x_\circ} \frac{f(x)}{g(x)} = ۱$ حد، آن دو تابع راوقتی x به سمت $x_\circ$ میل کند هم‌ارز گویند و می‌نویسند $f\sim g$. در تعریف فوق $x_\circ$ می‌تواند هرعدد حقیقی، $+\infty$ یا $-\infty$ باشد .

مثال۱- تابع‌های $\sin x$ و x وقتی x به‌سمت صفر میل می کند هم‌ارز می‌باشند . (اثبات این مطلب را درسال سوم دیده‌اید) :

$$\underset{x\to \circ^-}{\text{حد}} \frac{\sin x}{x} = \underset{x\to \circ^+}{\text{حد}} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

در محاسبهٔ حد حاصلضرب یا خارج قسمت دو تابع، در نقطهٔ $x_\circ$ می‌توان به جای هر تابع شرکت کننده در آن عبارت یك تابع هم ارزآن (وقتی x به‌سمت $x_\circ$ میل کند) را قرار داد.

مثال۲- می‌توانیم از این خاصیت مثلاً در مورد پیدا کردن حد تابع $\frac{\sin ۵x}{\sin ۳x}$ استفاده کنیم، یعنی به‌جای هرتابع هم‌ارز آنرا قرار بدهیم، پس خواهیم داشت:

$$\underset{x\to \circ}{\text{حد}} \frac{\sin ۵x}{\sin ۳x} = \underset{x\to \circ}{\text{حد}} \frac{۵x}{۳x} = \frac{۵}{۳}$$

در قضایای زیر منظور از یك تابع حددار تابعی است که دریك نقطه‌حدداشته و حدش با پایان (محدود) باشد.

قضایای حد

۲-۸- قضیه

حد مجموع دو تابع حددار مساوی است با مجموع حدود آنها.

۲-۹- قضیه

اگر تابع حد داری‌را درعدد ثابتی ضرب کنیم حد آن درهمان عدد ضرب‌خواهد شد.

مثال-

$$\underset{x\to \circ}{\text{حد}} \left(-۲\frac{\sin x}{x}\right) = -۲\times \underset{x\to \circ}{\text{حد}} \frac{\sin x}{x} = -۲\times ۱ = -۲$$

۲-۱۰- قضیه

حد تفاضل دو تابع حددار مساوی است با تفاضل حدود آنها.

۲-۱۱- قضیه

حد حاصل ضرب دو تابع حددار مساوی است با حاصلضرب حدودآنها.

مثال-

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\sin x\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) =$$

$$\left(\lim_{x\to 0} \sin x\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) = 0 \times 1 = 0$$

تبصره- قضایای ۲-۸ و ۲-۱۱ را می‌توان درمورد چند تابع نیز بیان کرد.

۲-۱۲- قضیه

حد خارج قسمت دوتابع حددار مساوی است با خارج قسمت حدهای آنها به‌شرطی که حد مخرج صفر نباشد.

این قضیه را نیز بدون‌اثبات می‌پذیریم.

۲-۱۳- قضیه

حد ریشهٔ n ام یا توان n ام یك تابع حددار مساوی با ریشهٔ n ام یا توان n ام حد همان تابع است.

اثبات- برای حالت توان n ام قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض کنید که $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

بنا به تبصرهٔ فوق داریم:

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^n = \underbrace{\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\cdots\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)}_{\text{n بار}} =$$

$$\underbrace{L \times L \times \cdots \times L}_{\text{n بار}} = L^n$$

تبصره- این قضایا در حالتی که x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند نیز صادق می‌باشند. البته توجه دارید که در این قضایا فرض شده است که حدود توابع مورد بحث با پایان هستند و بینهایت نمی‌باشند. درغیر این صورت می‌توانیم نتایج زیررا اضافه کنیم:

I- اگر f به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ و g به‌سمت مقدار باپایانی میل کند مجموع $f + g$ به‌ترتیب به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهد کرد.

II- اگر f به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ و g به سمت مقدار با پایان مثبتی میل کند حاصل ضرب $f.g$ به ترتیب به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ یا ∞ میل خواهد کرد اگر حد g به سمت مقدار با پایان منفی میل کند حاصلضرب به‌سمت $-\infty$ یا $+\infty$ میل خواهد کرد.

III- اگر f به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ و g به‌سمت یك حد با پایان میل کند خارج قسمت $\frac{f}{g}$ به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهد کرد.

IV- اگر g به‌سمت صفر و f به‌سمت یك حد با پایان غیرصفر میل کند خارج قسمت $\frac{f}{g}$ به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهد کرد.

V- اگر g به‌سمت $-\infty$ یا $+\infty$ و f به‌سمت یك حد با پایان میل کند خارج قسمت $\frac{f}{g}$ به‌سمت صفر میل خواهد کرد.

۲-۱۴- قضیه

اگر x به‌سمت صفر میل کند هرچند جمله‌ای از x هم‌ارز جمله‌ای از آن‌چند جمله‌ای خواهد بود که دارای کوچکترین توان است.

اثبات- فرض کنیم چند جمله‌ای $P(x)$ به‌صورت زیر باشد:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_m x^m \text{ ، } 0 \leqslant n < m \text{ و } a_n \neq 0 \text{ و } a_m \neq 0$$

از جملهٔ اول که دارای کوچکترین توان است فاکتور می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$P(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} x + \dots + \frac{a_m}{a_n} x^{m-n} \right)$$

حال اگر x به‌سمت صفر میل کند داخل پرانتز به‌سمت ۱ میل می‌کند و درنتیجه خواهیم داشت:

$$\underset{x \to 0}{\text{حد}} \frac{P(x)}{a_n x^n} = 1 \qquad\qquad \underset{x \to 0}{P(x)} \sim \underset{x \to 0}{a_n x^n}$$

۲-۱۵- قضیه

اگر x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند هر چند جمله‌ای از x هم ارز آن جمله‌ای از چند جمله‌ای خواهد بود که دارای بزرگترین توان است.

اثبات- فرض کنیم چند جمله‌ای $P(x)$ به شکل زیر باشد:

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0 \text{ ، } a_m \neq 0$$

از جملهٔ اول که دارای بزرگترین توان است فاکتورمی‌گیریم خواهیم داشت:

$$P(x)=a_m x^m\left(1+\frac{a_{m-1}}{a_m x}+\ldots+\frac{a_n}{a_m x^m}\right)$$

اگر x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند داخل پرانتز به‌سمت ۱ میل خواهد کرد و در نتیجه:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{P(x)}{a_m x^m}=1 \Longrightarrow \underset{x\to\pm\infty}{P(x)} \sim \underset{x\to\pm\infty}{a_m x^m}$$

۲-۱۶- قضیه

حد تابع $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}$ وقتی که x میل می‌کند به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ برابراست با حد نسبت جملهٔ بزرگترین درجه صورت به جملهٔ بزرگترین درجهٔ مخرج وقتی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ یعنی :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m x^m}{b_n x^n}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_m}{b_n}x^{m-n}$$

تذکر:

۱- حد تابع ثابت $f(x)=c$ وقتی که $x\to x_0$ برابر مقدار ثابت است یعنی :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=c$$

۲- اگر f تابع با ضابطهٔ $n\in N$ و $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ باشد.
حد تابع f وقتی که $x\to x_0$ برابر $f(x_0)$ است یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$$

۳- اگر f تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}$$

باشد. حد تابع $f(x)$ وقتی $x\to x_0$ در صورتیکه $Q(x_0)\neq 0$ باشد. برابر است با: $f(x_0)=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad \text{و} \quad Q(x_0)\neq 0$$

۴- ثابت می‌کنند که توابع $\sin x$ و $\cos x$ درهر نقطه $x_0\in R$ دارای حد هستند و حدهر یك از آنها برابر مقدار آن تابع در x_0 است یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$$

۲-۱۷- مسئله اصلی

اینك یك مسئله اساسی را کـه عبارت از پیدا کردن حد یك تابع است مطرح می‌کنیم . در خیلی از توابع به صورت $f:x\to y = f(x)$ وقتی که x به‌سمت مقدار ثابت x_0 میل می‌کند حد تابع f همان مقدار $f(x_0)$ می‌شود

یعنی:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ولی این مطلب عمومیت ندارد زیرا ممکن است.

الف- تابع حد نداشته باشد ولی $f(x_0)$ وجود داشته باشد.

ب- تابع حد داشته‌باشد ولی $f(x_0)$ وجود نداشته باشد .

ج- تابع حد داشته باشد و $f(x_0)$ هم وجود داشته باشد ولی با هم مساوی نباشند.

مثال۱- تابع $f(x) = x + ۲ + \sqrt{x}$ داده شده است. اگر x به‌سمت صفر میـل کند حد تابع و همچنین $f(۰)$ را حساب کنید.

حل- ملاحظه می‌شود که $f(۰) = ۲$ است ولی اگر x به‌سمت صفرمیل بکند تابع حدندارد زیراکه حد چپ ندارد یعنی مقدار «$\lim_{x\to 0^-} (x + ۲ + \sqrt{x})$» موجود نیست.

مثال۲- تابع f بـه وسیله دستور $f(x) = ۳x + ۲$ $(x\notin z)$ تعـریف شده است وقتی x به سمت ۲ میل کند حد این تابع را حساب کنید.

حل- چون ۲ عددی درست است بنابراین $f(۲)$ وجود ندارد. ولی تابع حد دارد زیرا وقتی x به‌سمت ۲ میل‌می‌کند x مخالف ۲ است ودرنتیجه $f(x) = ۳x + ۲$ و از این روی‌حدش همان حد تابع $۳x + ۲$ است که برابر ۸ می‌باشد.

مثال۳- تابع $g(x) = \begin{cases} x^{۲}+۱ & (x \notin z) \\ ۰ & (x \in z) \end{cases}$ داده شده است

$\lim\limits_{x \to ۲} g(x)$ حد، و مقدار $g(۲)$ را محاسبه کنید. آیا این دو مساوی‌اند؟

حل- وقتی x عددی صحیح نباشد $g(x) = x^{۲}+۱$ است از طرفی می‌دانیم که حد یك تابع در یك نقطه به مقدار خود تابع در آن نقطه بستگی ندارد پس حد g وقتی x به‌سمت ۲ میل کند برابر ۵ است زیرا: $\lim\limits_{x \to ۲} g(x) = \lim\limits_{x \to ۲} (x^{۲}+۱) = ۵$ حد، اما مقدار g در نقطه $x = ۲$ برابر صفر است:

پس داریم: $\lim\limits_{x \to ۲} g(x) = ۵ \neq ۰ = g(۲)$

از این مقدمه چنین نتیجه می‌شود که وجود $f(x_{۰})$ برای موجود بودن حد وقتی که x به‌سمت $x_{۰}$ میل می‌کند نه شرط لازم است و نه‌شرط کافی، وفقط در توابع پیوسته است که حد تابع با مقدار $f(x_{۰})$ مساوی می‌شود.

به هرحال درصورتی که x به سمت $x_{۰}$ میل می‌کند برای تعیین حد تابع $f(x)$ باید به‌نکات زیر توجه داشت:

۱- آیا تابع درهمسایگی $x_{۰}$ تعریف شده است یا خیر؟ درصورتیکه تابع در همسایگی $x_{۰}$ تعریف نشده باشد حد در آن نقطه مفهومی ندارد.

مثال- حد تابع $f(x) = \sqrt{x(x+۱)} + \sqrt{x(x-۱)}$ را وقتی که $x \to ۰$ بدست‌آورید

حل: $f(۰) = ۰$ وجود دارد ولی تابع درنقطه $x_{۰} = ۰$ حد ندارد زیرا درهمسایگی $x = ۰$ تابع تعریف نشده است.

۲- اگر x ازطرف راست یا چپ به سمت $x_{۰}$ میل بکند، این دومیل بایکدیگر فرق‌دارند یا خیر؟ برای این منظور اغلب ازروش زیر استفاده می‌کنند. ابتدا درعبارت $f(x)$ به جای x مقدار $x = x_{۰} + \varepsilon$ را قرار داده تا $f(x)$ تبدیل به $f(x_{۰}+\varepsilon)$ می‌شود، درعبارت اخیر یك دفعه $\varepsilon > ۰$ فرض کرده و به‌سمت صفر میل می‌دهیم و یك دفعه $\varepsilon < ۰$ فرض کرده به‌سمت صفر میل می‌دهیم اگر دو حد برابر بودند تابع حد خواهد داشت.

به‌طور کلی اگر $f(x_{۰}+\varepsilon) = l + \varepsilon'$ در آید به‌قسمی که $|\varepsilon| < \alpha \Longrightarrow |\varepsilon'| < \beta$ دراین‌صورت حد تابع l خواهد بود.

و اگر $f(x+\varepsilon) = \dfrac{k}{\varepsilon'}$ با همان‌شرط درآید دراین‌صورت حد تابع $+\infty$ یا $-\infty$ خواهد

بود برای صفرکردن ε درعبارت $f(x_\circ+\varepsilon)$ نباید عجله کرد زیرا که با این عمل ممکن است اشتباهی رخ بدهد و به علاوه ε بینهایت کوچك است وصفر نیست.

۳ــ اگر $f(x_\circ)$ بی‌معنی یا مبهم باشد، دراین صورت نقطهٔ $x_\circ$ ومقدار $f(x_\circ)$ را از مسئله جدا می کنیم و درآنچه باقی می‌ماند حد تابع را معلوم می کنیم.

مثال۱ــ حد چپ وحد راست تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x>۱ \\ ۲ & x=۱ \\ ۲x+۱ & x<۱ \end{cases}$ را وقتی‌که $x\to ۱$ حساب کنید.

حل:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = \lim_{x\to ۱^+} (x^۲-۱)=\circ$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x) = \lim_{x\to ۱^-} (۲x+۱)=۳$$

مثال۲ــ حد چپ وراست تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^۲+۳}}{x-۱}$ را وقتی که $x\to ۱$ پیدا کنید.

حل: می‌توانیم $x=۱+\varepsilon$ اختیار کنیم که ε مثبت یا منفی به سمت‌صفر میل می کند خواهیم داشت:

$$f(۱+\varepsilon)=\frac{\sqrt{(۱+\varepsilon)^۲+۳}}{۱+\varepsilon-۱}=\frac{\sqrt{۴+\varepsilon^۲+۲\varepsilon}}{\varepsilon}$$

اگر $\varepsilon>\circ$ باشد:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{\sqrt{x^۲+۳}}{x-۱}=\lim_{\varepsilon\to\circ^+}\frac{\sqrt{۴+\varepsilon^۲+۲\varepsilon}}{\varepsilon}=+\infty$$

اگر $\varepsilon<\circ$ باشد:

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\sqrt{x^۲+۳}}{x-۱}=\lim_{\varepsilon\to\circ^-}\frac{\sqrt{۴+\varepsilon^۲+۲\varepsilon}}{\varepsilon}=-\infty$$

مثال۳ــ حدتابع $f(x)=x+\dfrac{\sqrt{x^۲}}{x}$ راوقتی که x به‌سمت‌صفر میل‌می کنددرصورت وجود تعیین کنید.

حل: می‌توانیم بنویسیم $f(x)=x+\dfrac{|x|}{x}$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{اگر} \quad x>0 \\ \text{تعریف‌نشده} & \text{اگر} \quad x=0 \\ x-1 & \text{اگر} \quad x<0 \end{cases}$$

اگر حالت $x=0$ و $f(0)$ را کنار بگذاریم

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-1) = -1$$

حد چپ برابر $1-$ و حد راست برابر یك است پس تابع در $x_0=0$ حد ندارد زیرا حد چپ و راست آن باهم برابر نیستند.

مثال ۴- حد تابع $f(x)=\dfrac{5x+2}{x-1}$ را وقتی‌که x به سمت ۲ میل می‌کند پیدا کنید.

حل:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{5x+2}{x-1} = \frac{5\times 2+2}{2-1} = 12$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 12$$

۲-۱۸- حد چپ و حد راست درتابع هموگرافیك

تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ به نام تابع هموگرافیك موسوم است و دامنهٔ تعریف آن $D_f = R - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ است حد چپ وحد راست تابع در موقعی که x به سمت $-\dfrac{d}{c}$ میل می‌کند با یکدیگر مساوی نیستند اگر تابع صعودی باشد حد چپ $+\infty$ و حد راست $-\infty$ است و اگر تابع نزولی باشد حد چپ $-\infty$ و حدراست $+\infty$ خواهد بود.

مثال - حد تابع $y=\dfrac{2x-6}{x-1}$ را وقتی‌که $x\to 1$ میل می‌کند (ریشهٔ مخرج) معین کنید.

چون مشتق تابع $y'=\dfrac{4}{(x-1)^2}>0$ است داریم.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$$

یعنی تابع بازاء $x\to 1$ حد ندارد و بعلاوه در این مثال $f(1)$ بی‌معنی است.

۲-۱۹- حد چپ و راست در تابع پله‌ای

طبق تعریف تابع پله‌ای داریم:

$$\forall x\in R \text{ و } \exists n\in Z ، n\leqslant x<n+۱ \Longrightarrow [x]=n$$

در نتیجه: $\forall n\in Z$ و $x\to n^-$ یعنی $n-۱\leqslant x<n \Longrightarrow [x]=n-۱$

پس در نقاط به‌طول عدد صحیح n خواهیم داشت:

حد چپ: $\underset{x\to n^-}{\text{حد}}\ [x]=n-۱$

$$\forall n\in z \text{ و } x\to n^+ \text{ یعنی } n\leqslant x<n+۱ \Longrightarrow [x]=n$$

حد راست: $\underset{x\to n^+}{\text{حد}}\ [x]=n$

مقدار تابع: $f(n)=n$

چون در نقاط به طول عدد صحیح، حد چپ و راست تابع با یکدیگر مساوی نیستند پس این تابع در آن نقاط حد ندارد.

تمرین - حد چپ و راست تابع $f(x)=x\,[x]$ را وقتی که $x\to ۲$ حساب کنید.

۲-۲۰- تعیین حد چندتابع

مثال۱- حد تابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۲x-۱}{x-۱}$ را وقتی $x\to ۱$ پیدا کنید.

حل: چون x به‌سمت ریشه مخرج یعنی ۱ میل می‌کند نمی‌توان از دستور زیر استفاده نمود.

$$\underset{x\to ۱}{\text{حد}}\ f(x)=f(۱)$$

در نتیجه باید حد چپ وحد راست تابع را حساب نمود. و می‌توان نوشت:

$$x=۱+\varepsilon$$

$$f(۱+\varepsilon)=\frac{(۱+\varepsilon)^۲-۲(۱+\varepsilon)-۱}{(۱+\varepsilon)-۱}=\varepsilon-\frac{۲}{\varepsilon}$$

$$\underset{x\to ۱^+}{\text{حد}}\ f(x)=\underset{\varepsilon\to ۰^+}{\text{حد}}\ (\varepsilon-\frac{۲}{\varepsilon})=-\infty$$

$$\underset{x\to ۱^-}{\text{حد}}\ f(x)=\underset{\varepsilon\to ۰^-}{\text{حد}}\ (\varepsilon-\frac{۲}{\varepsilon})=+\infty$$

مثال۲ــ حد تابع $f(x)=\sqrt{x^{2}-3x+3}$ را وقتی که x به‌سمت یك میل‌می‌کند بدست آورید.

حل:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=1$$

مثال۳ــ حد تابع $f(x)=-2x^{3}+3x+1$ را وقتی که $x\to\pm\infty$ بدست آورید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^{3}+3x+1)=\lim_{x\to+\infty}(-2x^{3})=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^{3}+3x+1)=\lim_{x\to-\infty}(-2x^{3})=+\infty$$

مثال۴ــ حد تابع $f(x)=\sqrt{x^{2}-3x+2}$ را وقتی که $x\to\pm\infty$ حساب کنید.

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^{2}-3x+2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^{2}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}|x|=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}|x|=+\infty$$

۲-۲۱ــ صورتهای مبهم

حتماً تاکنون دربررسی مسائل حـد به‌صورتهای

$$\frac{0}{0}\text{ ، }\frac{\infty}{\infty}\text{ ، }0\times\infty\text{ و }\infty-\infty$$

برخورده‌اید . این صورتها را صورتهای مبهم می‌گویند ، زیرا مقادیری که سرانجام برای هر یك ازآنها بدست خواهیم آورد معمولا از مسئله‌ای بـه مسئله دیگـر فـرق می‌کند. سه صورت $\frac{\infty}{\infty}$ و $\infty\times0$ و $\infty-\infty$ قابل تبدیل به صورت $\frac{0}{0}$ می‌باشند. در زیر با ذکر چند مثـال روش رفع ابهام‌ازاین صور رابیان خواهیم کرد.

مثال۱ــ حد تابع $f(x)=\frac{5x+2}{2x-1}$ را وقتیکه x به‌سمت $\pm\infty$ میل می‌کند تعیین‌کنید.

حلــ این‌کسر به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ در می‌آیدکه با استفاده از قضیهٔ ۲ــ۱۵ و آنچه‌کـه در زیر مثال شماره ۲ــ۷ گفتیم خواهیم داشت:

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{5x+2}{2x-1} = \underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{5x+2}{2x-1} = \underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

البته حد فوق را می‌توان به کمک قاعدهٔ هوپیتال (که‌درسال سوم دیده‌اید) نیز بدست‌آورد.

مثال۲- حد تابع $f(x) = \frac{2x^2-3}{5x^2+5x+1}$ را وقتی که x به‌سمت $\pm\infty$ میل می‌کند تعیین کنید.

حل این کسر نیز به‌صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ درمی‌آید که مانند مثال قبل می‌توان عمل کرد.

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{2x^2-3}{5x^2+5x+1} = \underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$$

مثال۳- حدتابع $f(x) = \frac{4x^3-3x^2+1}{1-x^2}$ را وقتی که x به‌سمت $\pm\infty$ میل می‌کند تعیین کنید.

حل:

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \frac{4x^3-3x^2+1}{1-x^2} = \underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} \left(\frac{4x^3}{-x^2}\right)$$

$$= \underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}} (-4x) \qquad \begin{cases} \underset{x\to+\infty}{\text{حد}} f(x) = -\infty \\ \underset{x\to-\infty}{\text{حد}} f(x) = +\infty \end{cases}$$

مثال۴- حدتابع $f(x) = \frac{x}{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}$ را وقتی که $x\to+\infty$ معین کنید.

حل:

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}} f(x) = \underset{x\to+\infty}{\text{حد}} \frac{x}{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}} \frac{x}{x+|x|} = \underset{x\to+\infty}{\text{حد}} \frac{x}{x+x} = \frac{1}{2}$$

مثال۵- حدتابع $f(x) = \frac{3x-\sqrt{x^2+1}}{2x-\sqrt{x^2-1}}$ را وقتی که $x\to\pm\infty$ حساب کنید.

حل:
$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}} f(x)=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{۳x-\sqrt{x^۲+۱}}{۲x-\sqrt{x^۲-۱}}=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{۳x-|x|}{۲x-|x|}$$

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{۳x-x}{۲x-x}=۲$$

$$\underset{x\to-\infty}{\text{حد}} f(x)=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\frac{۳x-\sqrt{x^۲+۱}}{۲x-\sqrt{x^۲-۱}}=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\frac{۳x-|x|}{۲x-|x|}$$

$$=\underset{x\to-\infty}{\text{حد}}\frac{۳x+x}{۲x+x}=\frac{۴}{۳}$$

مثال۶ـ حد تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۲x+۵}-x$ را وقتی‌که x به‌سمت $+\infty$ میل می‌کند پیداکنید.

حل- ملاحظه می‌کنیم که تابع در این صورت مبهم است و به‌حالت $\infty-\infty$ درمی‌آید.
برای رفع ابهام تابع وپیداکردن حد آن به‌روش زیر عمل می‌کنیم:
صورت و مخرج کسر را درمزدوج صورت ضرب می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{\sqrt{x^۲+۲x+۵}-x}{۱}$$

$$=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{[\sqrt{x^۲+۲x+۵}-x][\sqrt{x^۲+۲x+۵}+x]}{[\sqrt{x^۲+۲x+۵}+x]}$$

$$=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{x^۲+۲x+۵-x^۲}{x\left[\sqrt{۱+\frac{۲}{x}+\frac{۵}{x^۲}}+۱\right]}$$

$$\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{۲x+۵}{x\left[\sqrt{۱+\frac{۲}{x}+\frac{۵}{x^۲}}+۱\right]}=\underset{x\to+\infty}{\text{حد}}\frac{۲x}{۲x}=۱$$

در تساوی ماقبل آخر، از این مطلب که $۲x\sim(۲x+۵)$ و $۲x\sim(۱+\sqrt{۱+\frac{۲}{x}+\frac{۵}{x^۲}})x$ وقتی $x\to+\infty$ استفاده شده است.

مثال۷ـ حد تابع $f(x)=\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x(x+۱)}$ را وقتی‌که x به‌سمت‌صفرمیل می‌کندحساب کنید.

حل:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty - \infty$$

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(x+1)} = \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

مثال ۸ــ حد تابع $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ را وقتی‌که x به‌سمت ۱ میل می‌کند پیدا کنید.

حل ــ این کسر به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ در می‌آید، برای رفع ابهام، صورت ومخرج کسر را تجزیه می‌کنیم، خواهیم‌داشت :

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

عامل مشترک $x-1$ را که درصورت ومخرج باعث حالت ابهام می‌شود حذف می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

مثال ۹ــ حد تابع $f(x) = \frac{\sin 3x}{5x}$ را وقتی‌که x به‌سمت صفر میل می‌کند تعیین کنید .

حل ــ وقتی x به‌سمت صفرمیل می‌کند تابع به‌صورت مبهم $\frac{0}{0}$ درمی‌آید. برای رفع ابهام دو روش‌داریم:

روش اول ــ استفاده از قانون هوپیتال.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{5x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{3\cos 3x}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

روش دوم ــ استفاده از توابع هم‌ارز ــ داریم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

مثال ۱۰ــ حد تابع $f(x) = x\cot g x$ را وقتی x به‌سمت صفر میل می‌کند تعیین کنید.

حل ــ وقتی x به‌سمت صفر میل‌کند این تابع به‌صورت مبهم $\infty \times 0$ درمی‌آید. برای‌رفع ابهام چنین عمل می‌کنیم:

$$\lim_{X\to 0} X\,cotg X = \lim_{X\to 0} \frac{X\cos X}{\sin X} = \lim_{X\to 0} \frac{X}{\sin X}\cos X =$$

$$\left(\lim_{X\to 0} \frac{X}{\sin X}\right)\left(\lim_{X\to 0} \cos X\right) = ۱ \times ۱ = ۱$$

تمرین:

حد تابعهای زیر را درنقاط داده شده درصورت وجود پیدا کنید.

۱– $f:x \longmapsto \frac{x^3+3x^2-4}{x^2-1}$ ، $x\to 1$

۲– $f:x \longmapsto \frac{x^4-2x^2+1}{x^2-5x+4}$ ، $x\to 1$

۳– $f:x \longmapsto \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ ، $x\to 4$

۴– $f:x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{x+1}{\sqrt{x}}$ ، $x\to 0^+$

۵– $f:x \longmapsto \frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{x}$ ، $x\to 0$

۶– $f:x \longmapsto \frac{x^n-a^n}{a^p-x^p}$ $n،p\in N$ ، $x\to a$ (n و $p\in N$)

۷– $f:x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ ، $x\to 0$

۸– $f:x \longmapsto \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ ، $x\to 4$

۹– $f:x \longmapsto \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$ ، $x\to 2$

۱۰– $f:x \longmapsto \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ ، $x\to 1$

۱۱– $f:x \longmapsto \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$ ، $x\to 0$

۱۲− $f:x \longmapsto \frac{۲}{x^{۲}-۱}-\frac{۱}{x-۱}$ ، $x \to ۱$

۱۳− $f:x \longmapsto \frac{x-\sqrt{x+۲}}{\sqrt{۴x+۱}-۳}$ ، $x \to ۲$

۱۴− $f:x \longmapsto \frac{\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$ ، ، $x \to a \quad (a > ۰)$

۱۵− $f:x \longmapsto \frac{\sin ۳x}{\sin ۵x}$ ، $x \to ۰$

۱۶− $f:x \longmapsto \frac{\sin ۳x}{tg\, ۵x}$ ، $x \to ۰$

۱۷− $f:x \longmapsto \frac{\sin^{۲} x}{۱-\cos x}$ ، $x \to ۰$

۱۸− $f:x \longmapsto \frac{\sin^{۲} x}{tg^{۲} x}$ ، $x \to ۰$

۱۹− $f:x \longmapsto (۱+\cos x)\, tg\frac{x}{۲}$ ، $x \to \pi$

۲۰− $f:x \longmapsto \frac{\sin ۲x}{\sqrt{۱-\cos x}}$ ، $x \to ۰$

۲۱− $f:x \longmapsto (\sin x-۱)\, tg^{۲} x$ ، $x \to \frac{\pi}{۲}$

۲۲− $f:x \longmapsto (۲x^{۲}-۳x+۱)\, tg\, \pi x$ ، $x \to \frac{۱}{۲}$

۲۳− $f:x \longmapsto (x^{۲}-۱)\, cotg(x^{۲}-۱)$ ، $x \to ۱$

۲۴− $f:x \longmapsto \frac{۱}{\sin x}-\frac{۱}{x}$ ، $x \to ۰$

۲۵− $f:x \longmapsto \frac{x(۱-x)\sin \lambda x}{۱-\cos ۲x}$ ، $\lambda \neq ۰$ ، $x \to ۰$

۲۶− a را چنان معین کنید که حد $\frac{(x-a)^{۲}}{(۱+\cos\frac{\pi}{a}x)}$ وقتی که x به‌سمت a میل می‌کند برابر $\frac{۲}{\pi^{۲}}$ باشد.

حد توابع زیر را در صورتی‌که x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند در صورت وجود به‌دست آورید.

۲۷- $f:x\longmapsto \dfrac{x^{4}-5x+1}{x^{2}+2}$

۲۸- $f:x\longmapsto \dfrac{x^{8}+2x-5}{x^{8}-7}$

۲۹- $f:x\longmapsto \dfrac{x^{3}-7x+1}{3x^{2}-4}$

۳۰- $f:x\longmapsto \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

۳۱- $f:x\longmapsto \sqrt{x^{2}+1}-\sqrt{x^{2}-1}$

۳۲- $f:x\longmapsto \sqrt{x^{2}+x}-x$

۳۳- $f:x\longmapsto \sqrt{x^{2}+ax+b}-x$

۳۴- $f:x\longmapsto \sqrt{x^{2}+2x}-\sqrt{x^{2}+4}$

۳۵- $f:x\longmapsto \dfrac{x+\sqrt{x^{2}+1}}{\sqrt{x^{2}-5x+1}}$

۳۶- $f:x\longmapsto \dfrac{x-\sqrt{x^{2}+x+1}}{2x-\sqrt{4x^{2}+x}}$

۳۷- $f:x\longmapsto \sqrt{x^{4}+x-2}-(x^{2}-1)$

۳۸- a و b را چنان معین کنید که $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^{2}-x+1}-ax-b)=0$ باشد

حد راست یا چپ: توابع زیررا از روی تعریف ثابت کنید.

۳۹- $\lim\limits_{x\to 1^{+}}\sqrt{x-1}=0$

۴۰- $\lim\limits_{x\to -2^{+}}\dfrac{x^{3}+8}{|x+2|}=12$

۴۱- $\lim\limits_{x\to -2^{-}}\dfrac{x^{3}+8}{|x+2|}=-12$

۴۲- $\lim\limits_{x\to 1^{+}}\dfrac{2}{x-1}=+\infty$

۴۳- $\lim\limits_{x\to 1^{-}}\dfrac{-x}{x-1}=+\infty$

پیوستگی تابع

۲-۲۲- پیوستگی تابع دریك نقطه

موضوع پیوستگی تابع را درسال سوم دیده‌اید. اینك آن را یادآوری می‌کنیم.

تعریف- تابع f را در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته گویند هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱- f در $x_\circ$ تعریف شده باشد یا به‌عبارت دیگر $x_\circ \in D_f$

۲- وقتی x به سمت $x_\circ$ میل کند تابع f حدداشته باشد.

۳- این حد برابر مقدار تابع در $x_\circ$ باشد یعنی $\lim\limits_{x \to x_\circ} f(x) = f(x_\circ)$

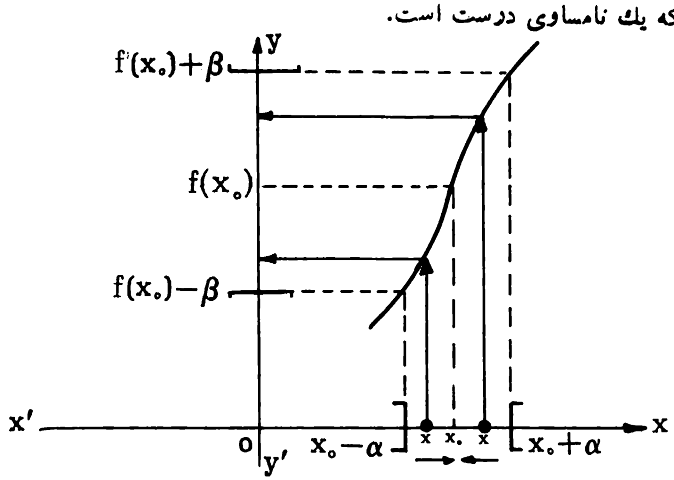
تذکر: با توجه به تعریف حد می‌توان تعریف پیوستگی را برحسب نمادهای α و β چنین بیان داشت:

$$\forall \beta > \circ \; \exists \alpha > \circ, \; |x - x_\circ| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_\circ)| < \beta$$

توجه کنیدکه دراینجا شرط $\circ < |x - x_\circ|$ حذف شده است زیرا:

اولا: f در $x_\circ$ تعریف شده است.

ثانیاً: طرف دوم استلزام فوق به ازای $x = x_\circ$ به صورت $|f(x_\circ) - f(x_\circ)| < \beta$ در می‌آید که یك نامساوی درست است.



مثال ۱ - پیوستگی تابع $x \xrightarrow{f} f(x) = x^۲ - ۲x + ۳$ را درنقطه $x_\circ = ۲$ بررسی کنید.

حل: اولاً- دامنه تعریف $D_f = R$ و $x_\circ = ۲ \in D_f$

ثانیاً- $f(x_\circ) = f(۲) = ۳$

ثالثاً- $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = \lim\limits_{x \to ۲} (x^۲ - ۲x + ۳) = ۲^۲ - ۲ \times ۲ + ۳ = ۳$

چون $\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = f(۲) = ۳$ ، می‌باشد تابع درنقطهٔ $x_\circ = ۲$ پیوسته است.

مثال۲- پیوستگی تابع $x \stackrel{f}{\longmapsto} f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\leqslant 0\\ 1+x & x>0\end{cases}$ را در نقطه $x_0=0$ بررسی کنید.

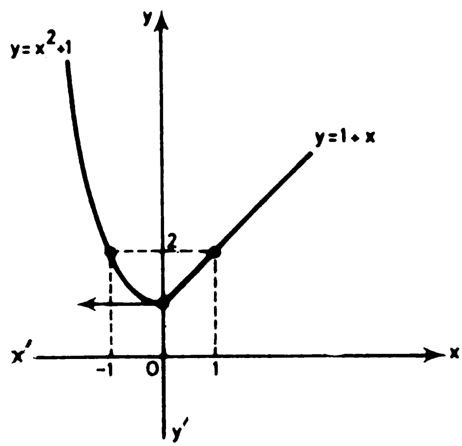
حل: اولاً- دامنهٔ تعریف $D_f=R$ و $x_0=0\in D_f$

ثانیاً- $f(x_0)=f(0)=0^2+1=1$

ثالثاً- $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+x)=1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$

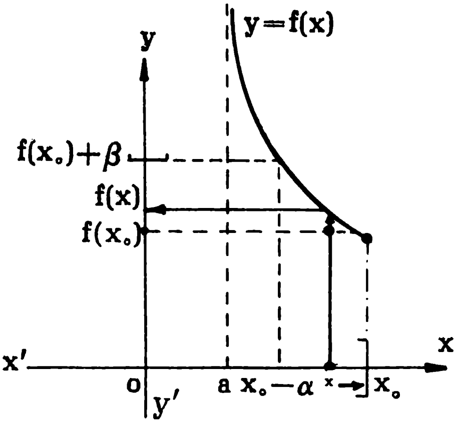
چون $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=1$ است تابع درنقطهٔ $x_0=0$ پیوسته است.



I- پیوستگی چپ

تعریف- تابع f که روی $]a, x_0]$ و $a<x_0$ معین است. درنقطهٔ x_0 پیوستگی چپ‌دارد هرگاه، وقتی‌که x ازسمت چپ به سمت x_0 میل می‌کند. حدتابع برابر $f(x_0)$ باشد، یعنی :

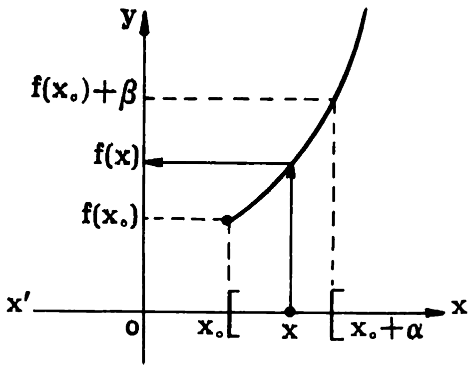
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$$



II- پیوستگی راست

تعریف- تابع f که روی $[x_0 , b[$ ، $x_0 < b$ معین است. در نقطه x_0 پیوستگی راست دارد هرگاه، وقتی که x ازسمت راست به‌سمت x_0 میل می کند، حد تابع‌برابر $f(x_0)$ باشدیعنی:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$



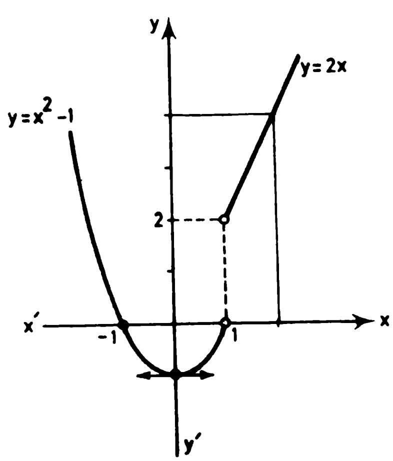
تذکر: اگر تابعی دریك نقطه پیوسته نباشد آن را گسسته یامنفصل گویند.

۲-۲۳- حالتهای انفصال (یا ناپیوستگی)

الف- وقتی که تابع درنقطهٔ x_0 معین نیست.

مثال ۱- تابع $f(x) = \frac{۱}{x^۲}$ در نقطهٔ $x_0 = ۰$ پیوسته نیست زیرا $f(۰)$ تعریف نشده‌است.

مثال ۲- تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x < ۱ \\ ۲x & x > ۱ \end{cases}$، هم‌در نقطه $x_0 = ۱$ پیوسته نیست زیرا $f(۱)$ تعریف نشده است.



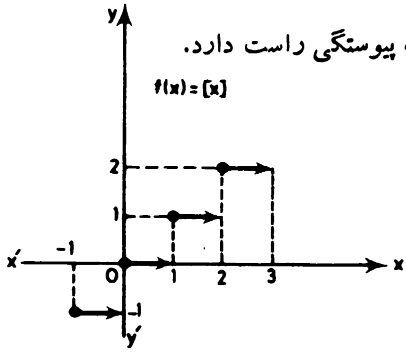
ب- تابع در نقطه x_0 حد ندارد یا دارای حد چپ و راست متمایز است.

مثال ۱- تابع پله‌ای $f(x)=[x]$ در نقطه به طول عدد درست $x_0=n\in Z ، n$ ناپیوسته است زیرا:

$$f(x_0)=f(n)=n$$

$$\lim_{x\to n^+} f(x)=n \quad ، \quad \lim_{x\to n^-} f(x)=n-1$$

حد چپ و راست تابع دراین نقطه ازهم متمایزند ولی چون $\lim_{x\to n^+} f(x)=f(n)=n$ است می‌گویند تابع در این نقطه پیوستگی راست دارد.



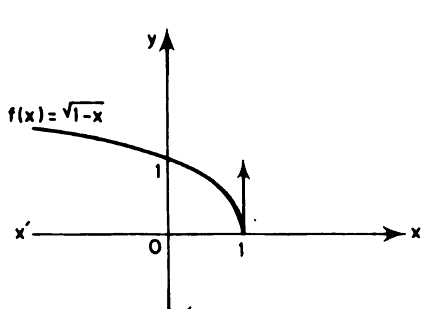
مثال ۲- تابع $f(x)=\sqrt{1-x}$ در نقطهٔ $x_0=1$ پیوستگی چپ دارد. زیرا:

$$x_0=1\in D_f \text{ و } D_f=]-\infty ، 1]$$

$$f(x_0)=f(1)=0$$

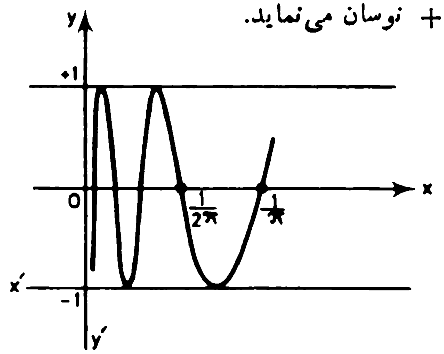
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}=0$$

این تابع حد راست ندارد زیرا x نمی‌تواند از مقادیر بیشتر از یک به‌سمت یک میل کند در نتیجه $\lim_{x\to 1^-} f(x)=0=f(1)$ بوده و تابع درنقطهٔ $x_0=1$ پیوستگی چپ دارد.



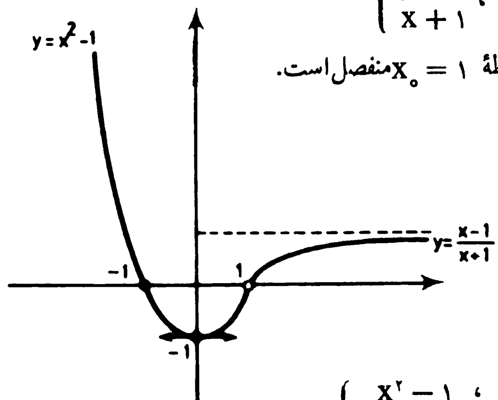
مثال۳- تابع $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} ، & x\neq 0\\ 0 ، & x=0\end{cases}$ ، درنقطه $x_0=0$ پیوسته نیست. زیرا وقتی که x بامقادیر

بزرگتر از صفر به سمت صفر میل می‌کند $\infty + \leftarrow \frac{1}{x}$ و . . . $\sin\frac{1}{x}$ بدون اینکه به‌سمت حدی میل کند بین ۱ − و ۱ + نوسان می‌نماید.

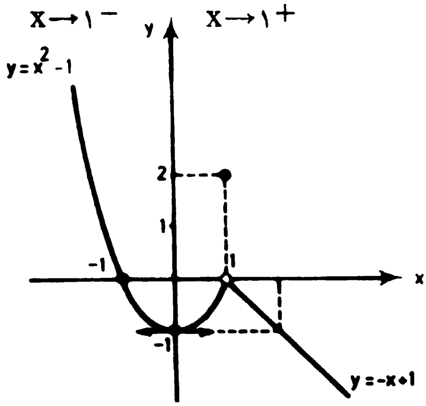


ج- تابع در نقطهٔ x_0 حد دارد ولی $f(x_0)$ یا معین نیست یا برابر باحد مزبور نیست.

مثال ۱- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \ , & x < 1 \\ \dfrac{x-1}{x+1} \ , & x > 1 \end{cases}$، در نقطه $x_0 = 1$ حد دارد ولی $f(1)$ تعریف نشده است پس تابع در نقطهٔ $x_0 = 1$ منفصل است.



مثال ۲- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 \ , & x < 1 \\ -x + 1 \ , & x > 1 \\ 2 \ , & x = 1 \end{cases}$ در نقطهٔ $x_0 = 1$ حد دارد ولی با $f(1) = 2$ برابر نیست $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0 \neq f(1) = 2$ ، درنتیجه تابع درنقطهٔ $x_0 = 1$ منفصل است.



۲-۲۴- قضایای پیوستگی

قضیهٔ اول- اگر f و g در x_0 پیوسته باشند $f \pm g$ نیز در x_0 پیوسته است.

قضیهٔ دوم- اگر f در x_0 پیوسته باشد، λf نیز در x_0 پیوسته است $(\forall \lambda \in R)$.

قضیهٔ سوم- اگر f و g در x_0 پیوسته باشند، تابع $f.g$ نیز در x_0 پیوسته است و اگر $g(x) \neq 0$ باشد، $\frac{f}{g}$ نیز در x_0 پیوسته است.

نتیجه- تابع $f(x) = x$ درهر نقطه پیوسته‌است ، بنا برقضیه(۳)تابع $g(x) = x^n$ (nنامنفی است) نیز چنین است. از این‌رو بااستفاده ازخاصیت‌های (۱) و(۲) می‌توان گفت که هر تابع چند جمله‌ای:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

پیوسته است.

به همین ترتیب می‌توان گفت که هر تابع کسری گویای $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ روی دامنهٔ تعریف یعنی برای $Q(x) \neq 0$ پیوسته است.

توابع قدر مطلق و $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ درتمام نقاط دامنهٔ تعریفشان پیوسته‌اند.

قضیهٔ چهارم- اگر f در نقطه x_0 پیوسته و درهمسایگی آن مثبت باشد، $\sqrt{f}$ نیز در x_0 پیوسته است.

قضیهٔ پنجم- اگر f درنقطه x_0 و g در نقطهٔ $y_0 = f(x_0)$ پیوسته باشند، تابع مرکب $h = gof$ در x_0 پیوسته است.

نتیجه- با استفاده ازمطالب بالا، ممکن است بررسی پیوستگی یك تابع دلخواه f را به بررسی پیوستگی توابع مقدماتی (مثل‌تابع توان، تابع مثلثاتی،...) که f با استفاده ازآنها ساخته می‌شود، برگردانیم. برای مثال تابع $f : x \longrightarrow \sin(\omega x + \varphi)$ پیوسته است، زیرا ترکیب دو تابع پیوسته زیر می‌باشد.

$$x \longmapsto (\omega x + \varphi) \longrightarrow \sin(\omega x + \varphi)$$

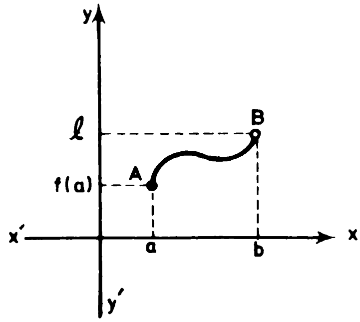
۲-۲۵- پیوستگی تابع در یك فاصله

تعریف ۱- تابع fرا درفاصله $]a$ و $b[$ یا $]a$ و $+\infty[$ پیوسته گویند در صورتیکه بازای هر نقطه به‌طول x_0 متعلق به‌این فاصله پیوسته باشد.

تعریف ۲- تابع f را در فاصله $[a$ و $b]$ که $a < b$ پیوسته‌گویند . درصورتیکه :

الف: در فاصله $]a$ و $b[$ پیوسته باشد.

ب: در نقطه بطول $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد.



نقطهٔ $A(a$ و $f(a))$ که متعلق به‌نمودار تابع است به‌نقطهٔ توقف موسوم است.

نقطهٔ $B(b$ و ℓ) که به‌نمودار تابع تعلق ندارد به‌نقطه حد موسوم است .

تعریف ۳- تابع f را در فاصله $]a$ و $b]$ که $a<b$ پیوسته گویند درصورتیکه :

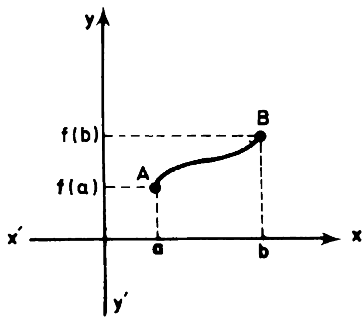
الف ـ در فاصله باز $]a$ و $b[$ پیوسته باشد.

ب ـ در نقطه بطول $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد .

تعریف ۴- تابع f را در فاصله $[a$ و $b]$ که $a<b$ پیوسته گویند درصورتی که :

الف ـ در فاصله باز $]a$ و $b[$ پیوسته باشد.

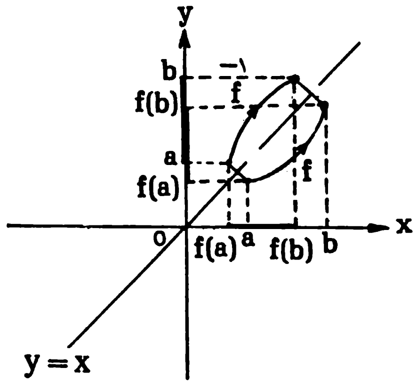
ب ـ در نقطهٔ به‌طول a پیوستگی راست و در نقطه به‌طول $x=b$ پیوستگی چپ داشته باشد.



نقاط به مختصات $A\left|\begin{matrix}a\\f(a)\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}b\\f(b)\end{matrix}\right.$ را نقاط توقف نمودار تابع می‌گویند.

قضیه: اگر تابع f روی $[a, b]$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد، معکوس پذیر است و تابع معکوس آن f^{-1} نیز روی $[f(a), f(b)]$ پیوسته و اکیداً صعودی است. (این قضیه بـا

اکیداً نزولی نیز درست است و از اثبات آن در این کتاب صرفنظر می‌کنیم).



مثال ۱ـ تابع $f(x) = x^3$ روی R پیوسته و یکنواست پس تابع معکوس آن $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ نیز روی R پیوسته و یکنواست.

مثال ۲ـ تابع $y = \cos x$ در فاصله $[\circ ,\pi]$ پیوسته و یکنواست تابع معکوس آن:

$x = \mathrm{Arc}\cos y$ یا $y = \mathrm{Arc}\cos x$ نیز درفاصلهٔ $[-۱ , +۱]$ نیز پیوسته و یکنواست.

مثال ۳ـ با استفاده از قضایای پیوستگی، پیوستگی هریک ازتوابع زیر را در طـول دامنهٔ تعریفشان بررسی کنید.

الف ـ $f(x) = x^5 + 2x^3$

ب ـ $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$

ج ـ $f(x) = x + 1 + \dfrac{x - 3}{x^2 - 4}$

د ـ $f(x) = \sqrt{x}(x^3 + 1)$

هـ ـ $f(x) = x + \sqrt{x^2}$

و ـ $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{x}}$

حل :

الف ـ f یک تابع چند جمله‌ای است که روی R معین و پیوسته است.

ب ـ f یک تابع خارج قسمت است که روی دامنه تعریفش $D_f = R - \{-۱ , ۱\}$ پیوسته است.

ج ـ تابع $x \xmapsto{h} h(x) = x + 1$ روی R پیوسته است و

$x \xrightarrow{g} g(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 - 4}$ روی $D_g = R - \{-۲ , ۲\}$ پیوسته است. درنتیجه تابع f روی

$D_f = D_h \cap D_g = R - \{-2 , 2\}$ پیوسته است زیرا از مجموع دوتابع پیوسته تشکیل شده است.

د ـ تابع $x \xmapsto{h} h(x) = \sqrt{x}$ روی $D_h = [0 , +\infty[$ پیوسته است تابع

$x \xrightarrow{g} g(x) = x^3 + 1$ هم روی $D_g = R$ پیوسته است در نتیجه تابع f روی ،

$D_f = D_h \cap D_g = [0 , +\infty[$ پیوسته است زیرا از حاصلضرب دو تابع پیوسته روی $D_f = [0 , +\infty[$ تشکیل شده است. (تابع f درنقطه‌ای بطول $x = 0$ فقط پیوستگی راست دارد زیرا سمت چپ $x = 0$ تابع تعریف نشده است.)

هـ ـ تابع قدر مطلق $x \xmapsto{h} h(x) = |x|$ روی $D_h = R$ پیوسته است و تابع

$x \xrightarrow{g} g(x) = x$ هم روی $D_f = R$ پیوسته است در نتیجه تابع f روی $D_f = R$ پیوسته‌است زیرا از مجموع دو تابع پیوسته تشکیل شده است.

و ـ تابع قدر مطلق $x \xmapsto{h} h(x) = |x|$ روی $D_h = R$ پیوسته است و تابع

$x \xmapsto{g} g(x) = \sqrt{x}$ هم روی $D_g = [0 , +\infty[$ پیوسته است و می‌دانیم خارج قسمت دو تابع پیوسته وقتی پیوسته است که $g(x) \neq 0$ در نتیجه تابع f روی ،

$D_f = D_h \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} =]0 , +\infty[$ پیوسته خواهد بود.

تمرین

الف ـ پیوستگی: مسائل زیررا با مراجعه به‌تعریف شماره ۲ـ۲۲ (بدون استفاده از بحث α و β) حل کنید.

۱ـ نشان دهیدکه تابع $f:x \longrightarrow \frac{x+3}{x-2}$ در نقطهٔ $x_0 = 1$ پیوسته است.

۲ـ نشان دهیدکه تابع $f:x \longmapsto x^3 + 2x - 3$ درنقطهٔ $x_0 = 2$ پیوسته‌است.

۳ـ نشان دهیدکه تابع $f:x \longmapsto \frac{2}{(x+1)^2}$ در نقطهٔ $x_0 = 0$ پیوسته است.

۴ــ نشان دهید که تابع $f:x \longmapsto \frac{x^۲+x+۱}{x-۱}$ در نقطهٔ $x_\circ = ۲$ پیوسته است.

۵ــ نشان دهید که تابع $f:x \longmapsto (x-۱)(x+۵)$ در نقطهٔ $x_\circ = ۱$ پیوسته است.

۶ــ نشان دهید که تابع $f:x \longmapsto \sqrt{۱+x}$ در نقطهٔ $x_\circ = ۲$ پیوسته است.

۷ــ تابع f به‌وسیلهٔ دستور زیر داده شده‌است:

$$f(x) = \begin{cases} |x-۲| & \text{اگر } x \neq ۲ \\ ۱ & \text{اگر } x = ۲ \end{cases}$$

پیوستگی تابع f را در نقطهٔ $x_\circ = ۲$ بررسی کنید. آیا درنقطهٔ مزبور پیوستگی راست یا چپ دارد؟

۸ــ تابع f به‌وسیلهٔ دستور زیر داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} -x+۱ & \text{اگر } x < \circ \\ x^۲ & \text{اگر } x \geqslant \circ \end{cases}$$

پیوستگی تابع f در نقطهٔ $x_\circ = \circ$ را بررسی کنید. آیا در نقطهٔ مزبور پیوستگی راست یا چپ دارد؟

۹ــ تابع f به‌وسیلهٔ دستورزیر داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} ۲x+۲ ، & \text{اگر } x > ۱ \\ ۲x-۲ ، & \text{اگر } x < ۱ \\ \circ ، & \text{اگر } x = ۱ \end{cases}$$

پیوستگی این تابع را در نقطهٔ $x_\circ = ۱$ بررسی کنید. آیا در نقطهٔ مزبور پیوستگی راست یا چپ دارد؟

۱۰ــ تابع f به‌وسیلهٔ دستور $f(x) = ۳x + \frac{|۲x|}{x}$ و $f(\circ) = ۲$ داده شده است پیوستگی آنرا در نقطهٔ $x_\circ = \circ$ بررسی کرده ونمودار آنرا درصفحهٔ محورهای قائم رسم کنید.

۱۱ــ همان سؤال مسئله ۱۰ برای تابع g بادستور: $g(x) = ۳x + \frac{|۲x|}{|x|}$

۱۲ــ تابع f بادستور زیر داده شده است:

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - \frac{\sqrt{(x-۱)^۲}}{x-۱} & \text{اگر } x \neq ۱ \\ ۲ & \text{اگر } x = ۱ \end{cases}$$

پیوستگی تابع‌رادرنقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی کرده ونمودارآن را درصفحهٔ مختصات قائم‌رسم کنید.

۱۳- تابع $f:x \longmapsto f(x) = (x - [x])$ مفروض است:

پیوستگی این تابع را در فاصله $]2, 3[$ بررسی کنید ودر فاصلهٔ $[-3, 3]$ نمودار آن را رسم کنید.

۱۴- همان سؤال برای تابع :

$$f:x \longmapsto \frac{x}{1+[x]}$$

۱۵- همان سؤال برای تابع :

$$f:x \xmapsto{f} [x] + [-x]$$

۱۶- تحقیق کنیدکه آیا تابع زیر در $x_0 = 0$ پیوسته است؟

$$x \xmapsto{f} \begin{cases} f(x) = x^2 \sin\frac{\pi}{x} & \text{اگر } x \neq 0 \text{ ،} \\ f(0) = 0 & \text{اگر } x = 0 \text{ ،} \end{cases}$$

۱۷- پیوستگی تابع $x \xmapsto{f} f(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$ را درنقطه $x_0 = 1$ بررسی کنید.

۱۸- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{،} x \leqslant 0 \\ x + 2 & \text{،} x > 0 \end{cases}$ $x \xmapsto{f} f(x)$ مفروض است پیوستگی این تابع را در نقطهٔ $x_0 = 0$ بررسی کنید.

۱۹- تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{x} & \text{،} x \neq 0 \text{ اگر} \\ 1 & \text{،} x = 0 \text{ اگر} \end{cases}$ $x \xmapsto{f} f(x)$ مفروض است پیوستگی این تابع را درنقطهٔ $x_0 = 0$ بررسی کنید.

۲۰- نشان دهید تابع $x \xmapsto{h} h(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ در نقطه $x_0 = \pi$ پیوسته است.

۲۱- نشان دهید تابع $x \xmapsto{f} f(x) = x + [x]$ در فاصله $]2, 3[$ پیوسته است.

۲۲- نشان دهیدتابع $x \xmapsto{f} f(x) = x[x]$ در فاصلهٔ $]2, 3[$ پیوسته‌است.

۲۳ـ تابع $x \overset{g}{\longmapsto} \begin{cases} g(x) = x\sqrt[3]{1-x} & \text{و} \quad x \leqslant 1 \\ g(x) = \sqrt{x-1} & \text{و} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$ مفروض است پیوستگی این تابع‌را

درنقطهٔ $x_0 = 1$ بررسی‌کنید ونشان دهید که تابع $x \overset{g}{\longmapsto} g(x) = \sqrt{x-1}$ روی دامنهٔ‌تعریفش پیوسته است سپس g^{-1} را بدست آورید.

۲۴ـ تابع f در R با ضابطهٔ

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x}\sqrt{|x|} \ ، \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

مفروض است.

الف ـ حد $f(x)$ وقتی‌که x به‌سمت صفر میل می‌کند چقدر است.

ب ـ نشان دهیدکه f در $x_0 = 0$ پیوسته است.

ج ـ نشان دهیدکه f روی R پیوسته است.

هـ ـ نشان دهیدکه‌تابع معکوس f برابراست با: $f^{-1}(x) = x|x|$.

فصل ۳

توابع مشتق پذیر

الف- مشتق

۳-۱- مشتق دریك نقطه

فرض می‌کنیم تابع f روی [a و b] معین و درنقطه $x_0 \in$ [a و b] پیوسته باشد.

می‌گویند تابع f درنقطه x_0 مشتق پذیر است، اگر نسبت $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ وقتی‌که x به سمت x_0 میل می‌کند، دارای یك‌حد باشد. این‌حد را مشتق تابع f در x_0 می‌گویند و به‌صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$f'(x_0)=\underset{x\to x_0}{\text{حد}}\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

مثال: مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در $x_0=1$ عبارت است از:

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$f'(1)=\underset{x\to 1}{\text{حد}}\ \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\underset{x\to 1}{\text{حد}}\ \frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

بنابراین داریم:

$$f'(1)=\frac{1}{2}$$

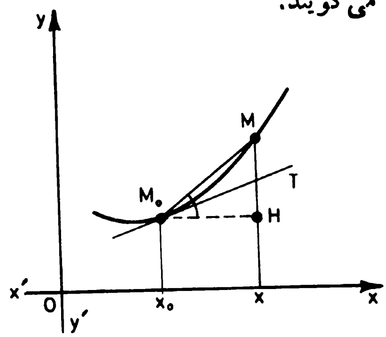
۳-۲- تعبیر هندسی مشتق

اگر $M_0(x_0$ و $f(x_0))$ یك نقطه منحنی نمایش تابع f باشد می‌دانیم که نسبت $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ نمایش ضریب زاویه وتر M_0M است‌که $M(x$ و $f(x))$ نقطه‌ای نزدیك به M_0 است اگر $x\to x_0$ آنگاه $f(x)\to f(x_0)$ زیرا f درنقطه M_0 پیوسته است. حد نقطه M، نقطه M_0 است در این صورت حد وتر M_0M مماس M_0T است.

بنا براین تعبیرهندسی مشتق تابع درنقطه $x_\circ$، برابر ضریب زاویه خط مماس در $x_\circ$ است.یعنی :

$m = f'(x_\circ)$ ضریب زاویه خط مماس در نقطه $x_\circ$

به $f'(x_\circ)$ عدد مشتق در $x_\circ$ می گویند.



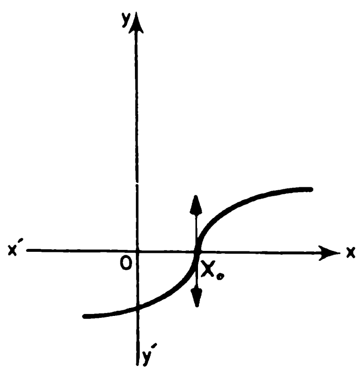
۳-۳ نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد

چندین حالت است که تابع f در $x_\circ$ مشتق پذیر نیست.

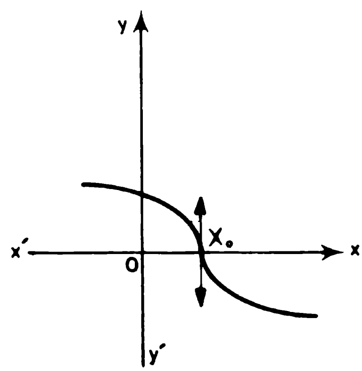
I- وقتی که عدد مشتق در $x_\circ$ بینهایت است یعنی:

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = +\infty \text{ یا } -\infty$$

، دراین صورت تابع f در $x_\circ$ مشتق ندارد ومماس برمنحنی دراین نقطه موازی محورyهاست.



a) $\lim_{x \to x_\circ} f'(x) = +\infty$



b) $\lim_{x \to x_\circ} f(x) = -\infty$

مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ در نقطه $x_\circ = 1$ مشتق‌پذیر نیست، زیرا :

$$\lim_{x \to x_\circ} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 0}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty$$

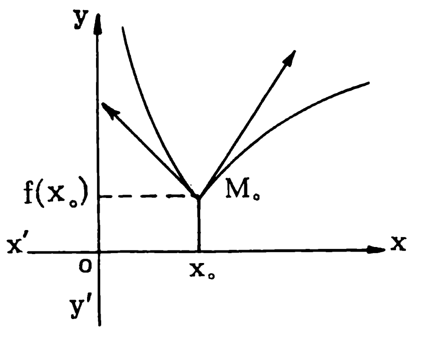
II– وقتی که عدد مشتق راست در نقطه x_0 با عدد مشتق چپ در این نقطه مساوی نیستند یعنی $l \neq l'$. مشتق راست در نقطـه x_0 عبارت است از:

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

مشتق چپ در نقطه x_0 عبارت است از:

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l'$$

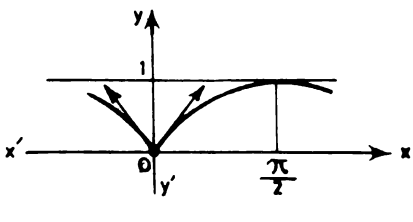
الف: اگر l و l' بینهایت نباشند. منحنی (C) نمایش تابع f در نقطه x_0 دارای دو نیم مماس است. نیم مماس راست و نیم مماس چپ در این‌جا نقطه x_0 را نقطه زاویه‌دار می‌نامند



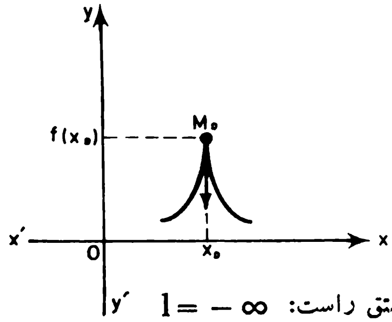
مثال: تابع $f(x) = |\sin x|$ در نقطه $x_0 = 0$ مشتق پذیر نیست، زیرا :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - 0}{x - 0} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin x - 0}{x - 0} = -1$$

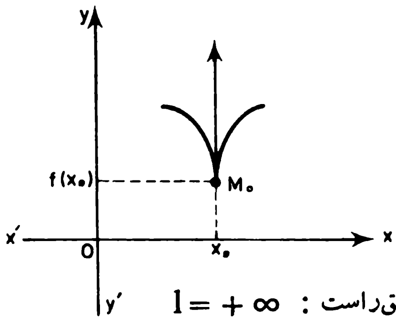


ب: اگر l و l' بینهایت باشند منحنی (C) نمایش تابع f در نقطه x_0 دارای مماسی موازی محور y هاست مانند شکل‌های زیر. نقطه M_0 را نقطه بازگشت منحنی می‌گویند.



مشتق راست: $l = -\infty$

مشتق چپ: $l' = +\infty$



مشتق راست: $l = +\infty$

مشتق چپ: $l' = -\infty$

مثال: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$ در نقطه $x_0 = 0$ مشتق پذیر نیست، زیرا:

$$l = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2}-0}{x-0} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{1-\frac{3}{x}} = -\infty$$

$$l' = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2}-0}{x-0} =$$

$$\lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{1-\frac{3}{x}} = +\infty$$

در این صورت نقطه $M_0(0, f(0))$ را نقطه بازگشت نمودار تابع f می‌نامند.

III_ وقتی که نسبت $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ حد ندارد (حد آن نه یك عدد محدود است و نه بینهایت و حد چپ و راست هم ندارد).

مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x_0 = 0$ مشتق پذیر نیست

زیرا $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ وجود ندارد.

قضیه ـ اگر f در x_0 مشتق پذیر باشد، f درنقطه x_0 پیوسته است.

(عکس این قضیه درست نیست یعنی ممکن است که تابع دریك نقطه پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق پذیر نباشد).

۳ـ۴ـ مشتق روی یك فاصله ـ تابع مشتق

تعریف ـ می‌گوئیم تابع f روی $[a , b]$ مشتق پذیر است، هرگاه:

اولا: $f'(x_0)$ برای هر $x_0\in]a , b[$ وجود داشته باشد.

ثانیاً: f در a از طرف راست و در b ازطرف چپ مشتق‌پذیر باشد.

در این صورت می‌توان تابع مشتق را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$f' : [a , b] \longmapsto R$$
$$x \overset{f'}{\longmapsto} f'(x)$$

مثال: تابع $f(x) = \sin x$ روی $[0 , 2\pi]$ مشتق‌پذیر است وتابع مشتق‌آن عبارت‌است از $f'(x) = \cos x$ زیرا

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} =$$

$$\frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} = \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \times \cos\frac{x+x_0}{2}$$

درحد، جمله اول این حاصلضرب به‌سمت یك میل می‌کند. بنابراین داریم:

$$\forall x_0\in[0 , 2\pi] \text{ ، } \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \cos x_0$$

۳ـ۵ـ محاسبه مشتق

چون طریقه به دست‌آوردن مشتقهای توابع مقدماتی را درکلاس سوم خوانده‌اید ازذکرآن خودداری می‌کنیم.

۳-۶- چند عمل روی تابعهای مشتق پذیر

فرض کنیم f و g دو تابع مشتق پذیر روی [a و b] باشند.

قضیه ۱- مجموع دوتابع مشتق‌پذیر یك تابع مشتق پذیر است وداریم:

$$\boxed{(f \pm g)' = f' \pm g'}$$

قضیه ۲- اگر f مشتق پذیر و $\lambda \in R$ باشد λf مشتق پذیر است و داریم :

$$\boxed{(\lambda f)' = \lambda . f'}$$

قضیه ۳- حاصلضرب دو تابع مشتق پذیر، یك تابع مشتق پذیر است وداریم :

$$\boxed{(fg)' = f'g + g'f}$$

نتیجه: توان n ام یك تابع مشتق پذیر، یك تابع مشتق پذیر است وداریم:

$$\boxed{(f^n)' = nf^{n-۱} \times f'}$$

قضیه ۴- اگر f و g مشتق‌پذیر باشند، تابع $\frac{f}{g}$ نیز، هر جا که $g(x) \neq ۰$ باشد، مشتق‌پذیر است و داریم :

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^۲}}$$

قضیه ۵- ترکیب دو تابع مشتق پذیر f و g یك تابع مشتق‌پذیر است و داریم:

$$\boxed{(gof)'(x) = g'(y) \times f'(x)} \quad ، y = f(x)$$

برای اثبات نمودار زیر را درنظر می گیریم:

$$\begin{tikzcd} x_\circ \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & y_\circ = f(x_\circ) \arrow[r, mapsto, "g"] & Z = g(y_\circ) = (gof)(x_\circ) \end{tikzcd}$$

از آنجاکه f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است داریم:

$$\underset{x \to x_\circ}{\text{حد}} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ} = f'(x_\circ)$$

و چون g در $y_\circ$ مشتق‌پذیراست داریم:

$$\underset{y \to y_\circ}{\text{حد}} \frac{g(y) - g(y_\circ)}{y - y_\circ} = g'(y_\circ)$$

واز طرف دیگر بنا بر تعریف مشتق داریم:

$$(gof)'(x_\circ) = \underset{x \to x_\circ}{\text{حد}} \frac{(gof)(x) - (gof)(x_\circ)}{x - x_\circ}$$

$$= \underset{x \to x_\circ}{\text{حد}} \frac{g(f(x)) - g(f(x_\circ))}{x - x_\circ} = \underset{x \to x_\circ}{\text{حد}} \frac{g(y) - g(y_\circ)}{x - x_\circ}$$

$$= \underset{y \to y_\circ}{\text{حد}} \frac{g(y) - g(y_\circ)}{y - y_\circ} \times \underset{x \to x_\circ}{\text{حد}} \frac{f(x) - f(x_\circ)}{x - x_\circ}$$

با توجه به $y = f(x)$ داریم:

$$(gof)'(x_\circ) = g'(y_\circ) \times f'(x_\circ)$$

یا بطور کلی داریم: $\boxed{(gof)'(x) = g'(y) \times f'(x) \text{ ، } y = f(x)}$ وهمچنین

$$\boxed{(fog)'(x) = f'(y) \times g'(x) \text{ ، } y = g(x)}$$

مثال ۱- تابع‌های f و g باضابطه‌های $f(x) = \sqrt[۳]{x^۲ - ۱}$ و $g(x) = x^۴ - ۱$ داده شده‌اند مشتق تابع gof را تعیین کنید و حاصل مشتق را به ازای $x = ۳$ بدست‌آورید.

حل:

$$(gof)'(x) = g'(y) \times f'(x) \text{ ، } y = f(x)$$

$$g(x) = x^۴ - ۱ \qquad g'(y) = ۴y^۳$$

$$y = f(x) = \sqrt[۳]{x^۲ - ۱} \qquad f'(x) = \frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲ - ۱)^۲}}$$

$$(gof)'(x) = ۴y^۳ \times \frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲ - ۱)^۲}}$$

$$(gof)'(x) = ۴(x^۲ - ۱) \times \frac{۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲ - ۱)^۲}} = \frac{۸}{۳} x \sqrt[۳]{(x^۲ - ۱)}$$

$$(gof)'(۳) = \frac{۸}{۳} \times ۳ \sqrt[۳]{۹ - ۱} = ۱۶$$

مثال ۲ـ تابعهای $y=f(x)=\sqrt{2x+1}$ و $z=g(y)=\frac{3y-1}{y}$ داده شده‌اند. مشتق z را نسبت به x تعیین و به‌ازای $x=0$ آنرا حساب کنید.

$$z=(gof)(x)$$

و $z'_x=z'_y\times y'_x=g'_y\times f'_x$

و $y'_x=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

$$z'_y=\frac{1}{y^2}\qquad z'_x=\frac{1}{y^2}\times\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$ و $z'(0)=1$

مثال ۳ـ تابعهای f و g با ضابطه‌های $f(x)=-3x+2$ و $g(x)=1-x^2$ داده شده‌اند.

الف ـ مشتق تابعهای $Z=(gof)(x)$ و $T=(fog)(x)$ را تعیین و به‌ازای $x=1$ مقدار هریك را حساب کنید.

ب‌ـ تابعهای مرکب $Z=(gof)(x)$ و $T=(fog)(x)$ را تعیین و با تعیین مشتق هر کدام درستی فرض الف را که حل کرده‌اید امتحان کنید.

حل‌ـ الف:

$$Z=(gof)(x)\ ،\ Z'_x=g'_y\times f'_x\ ،\ y=f(x)$$
$$f(x)=-3x+2\ ،\ f'_x=-3$$
$$g(y)=1-y^2\ ،\ g'_y=-2y$$
$$Z'_x=-2y\times(-3)=6y=6(-3x+2)\qquad \boxed{Z'(1)=-6}$$

$$T=(fog)(x)\ ،\ T'_x=f'_y\times g'_x\ ،\ y=g(x)$$
$$g(x)=1-x^2\ ،\ g'_x=-2x$$
$$f(y)=-3y+2\ ،\ f'_y=-3$$
$$T'_x=-3\times(-2x)=6x\qquad \boxed{T'(1)=6}$$

حل‌ـ ب:

$$Z=(gof)(x)=g[f(x)]=1-(-3x+2)^2=-9x^2+12x-3$$
$$\boxed{Z'_x=-18x+12}\ ،\ \boxed{Z'(1)=-6}$$
$$T=(fog)(x)=f[g(x)]=-3(1-x^2)+2=3x^2-1$$
$$\boxed{T'_x=6x}\ ،\ \boxed{T'(1)=6}$$

تمرین

۱ـ مشتق پذیری تابع $x \xmapsto{f} f(x) = \sqrt{x-۱}$ را در نقطه $x_\circ = ۱$ بررسی کنید.

۲ـ تابع f در R باضابطهٔ $x \xmapsto{f} f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-۱} \;،\; x \geqslant ۱ \\ \sqrt{۱-x} \;،\; x \leqslant ۱ \end{cases}$ مفروض است.

اولا: مشتق پذیری تابع f را درنقطه $x = ۱$ بررسی کنید.

ثانیاً: مشتق تابع را حساب کنید.

۳ـ مشتق پذیری تابع $x \xmapsto{f} f(x) = \sqrt{(x-۱)^۲(x+۲)}$ را در نقطه $x = ۱$ بررسی کنید.

۴ـ مشتق پذیری تابع $f(x) = |x^۲ - ۲x|$ را درنقطه $x_\circ = ۲$ بررسی کنید.

۵ـ دوتابع f و g به‌ترتیب زیر تعریف شده‌اند:

$$f(x) = \frac{۱}{۴x - ۳} \quad \text{و} \quad g(x) = ۳x^۲ - ۴$$

الف ـ هریك ازتابعهای: fog و gofرا تعیین کنید.

ب ـ مشتق آنها راهم مستقیماً وهم با استفاده‌از فرض الف تعیین کنید.

۶ـ تابعهای f و g به‌صورت زیر داده شده‌اند:

$$f(x) = \sin x + \cos x \quad \text{و} \quad g(x) = x^۲ - x$$

مشتق هریك از تابعهای fog و gof را تعیین کنید.

۷ـ مشتق تابع $n \in N$ و $f(x) = \frac{۱ - x^{n+۱}}{۱ - x}$ را حساب کنید و از آنجا حاصل جمع زیر رامعین کنید.

$$S = ۱ + ۲x + ۳x^۲ + \dots + nx^{n-۱}$$

۸ـ به‌فرض اینکه تابع f مشتق داشته باشد، مشتق اول ودوم هر یك ازتابعهای $f(x^۳)$ و $f(x^۲)$ و $f(\frac{۱}{x})$ را حساب کنید.

۹ـ توابع $f(t) = \sqrt{۲t^۲ + ۱}$ و $g(t) = t^۳ + ۱$ داده شده‌اند.

مطلوبست تعیین تابعهای fog و gof وسپس مشتق هریك ازآنها را به ازای $t = ۱$ حساب کنید.

۱۰- دوتابع $f(x) = -3x + 2$ و $g(y) = -2y^2 + y$ داده شده‌اند.
مطلوبست تابعهای gof و fog و محاسبهٔ مشتق هریك.

۱۱- دو تابع h و T به‌صورتهای زیر داده شده‌اند.

$$h(x) = \sin 2x + \cos 2x + 1 \quad \text{و} \quad T(x) = 4x - \frac{\pi}{3}$$

الف- مطلوبست تعیین تابعهای: hoT و Toh

ب- مشتق هریك از این دو تابع مرکب را تعیین وحاصل هریك را به‌ازای $x = \frac{\pi}{12}$ رادیان تعیین کنید.

۳-۷- مشتق تابع معکوس

قضیه ۶- هرگاه تابع $y = f(x)$ روی $[a \text{ و } b]$ معکوس‌پذیر[1] با مشتق مخالف‌صفر باشد. تابع $x = g(y)$ معکوس آن روی $[f(a) \text{ و } f(b)]$ مشتق‌پذیر است وداریم:

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(x)}} \quad ، \quad x = g(y)$$

برای اثبات طرح زیر را درنظر می‌گیریم.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & y \arrow[r, "g"] & x \end{tikzcd}$$

$$(gof)(x) = x$$

از طرفین باتوجه به‌مشتق ترکیب توابع، مشتق می‌گیریم.

$$(g'of)(x) \times f'(x) = 1 \quad ، \quad g'of(x) = g'[f(x)] = g'(y)$$

$$g'(y) \times f'(x) = 1$$

$$(1) \quad \boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(x)}} \quad ، \quad x = g(y)$$

یعنی مشتق تابع معکوس، برابرعکس مشتق تابع است ویا

$$(2) \quad \boxed{f'(x) = \frac{1}{g'(y)}} \quad ، \quad y = f(x)$$

۱- اگر تابع $y = f(x)$ در فاصلهٔ $[a \text{ و } b]$ اکیداً یکنوا باشد آنگاه در این فاصله معکوس‌پذیر است .

اگر نماد $\frac{dy}{dx}$ را برای مشتق y نسبت به x (یعنی $f'(x)$) و نماد $\frac{dx}{dy}$ را برای مشتق x نسبت به y (یعنی $g'(y)$) به‌کار بریم رابطهٔ (۱) و (۲) را می‌توان به‌صورتهای زیر نوشت:

$$x'_y=\frac{1}{y'_x} \quad , \qquad y'_x=\frac{1}{x'_y}$$

از طرفی اگر تابع معکوس f را به f^{-1} نمایش دهیم، می‌توانیم بنویسیم .

$$(f^{-1})'(f_{(x)})=\frac{1}{f'_{(x)}} \quad \text{یا} \quad f'_{(x)}=\frac{1}{(f^{-1})'(f_{(x)})}$$

$$\boxed{(f^{-1})'=\frac{1}{f'of^{-1}}}$$

مثال ۱- تابع f به صورت زیر داده شده است :

$$y=f(x)=\mathrm{Arc}\sin x \qquad x\in[-1 \text{ و } 1] \qquad y\in[-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}]$$

الف- مشتق تابع فوق را به‌کمك مشتق تابع معکوس تعیین کنید.

ب- معادلهٔ تابع معکوس را بنویسید ودومنحنی را دریك دستگاه مختصات رسم کنید.

حل- الف: تابع داده شده‌درفاصلهٔ [۱ و ۱ −] پیوسته‌وصعودی است پس‌معکوس دارد و تابع معکوس‌آن $x=\sin y$ است که در آن y متغیر مستقل و x متغیر تابع است یعنی :

$$x=\sin y \qquad y\in[-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}] \qquad x\in[-1 \text{ و } 1]$$

$$x'=\cos y$$

$$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{\cos y}$$

با فرض $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ ، چون $\cos y$ مثبت است بنابراین:

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

ودرنتیجه : $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ یعنی:

$$\begin{cases} y=\mathrm{Arc}\sin x \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ و } x\neq\pm 1 \end{cases}$$

دستور f:

$$y = \mathrm{Arc}\sin x \ ، \ -۱ \leqslant x \leqslant ۱ \ \text{و} \ \frac{-\pi}{۲} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{۲}$$

دستور $f^{-۱}$:

$$y = \sin x \ ، \ \frac{-\pi}{۲} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{۲} \ \text{و} \ -۱ \leqslant y \leqslant ۱$$

سه نقطه از تابع اول:

$$A(-۱ \ \text{و} \ \frac{-\pi}{۲}) \ \text{و} \ O(\circ \text{و} \circ) \ \text{و} \ B(۱ \ \text{و} \frac{\pi}{۲})$$

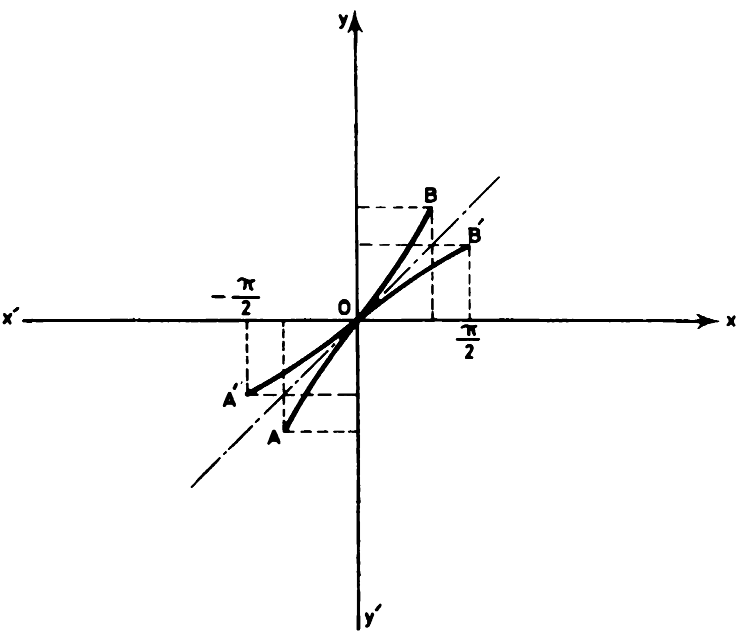
نقطه‌های متناظر از تابع دوم:

$$A'(-\frac{\pi}{۲} \ \text{و} \ -۱) \ \text{و} \ O(\circ \text{و} \circ) \ \text{و} \ B'(\frac{\pi}{۲} \ \text{و} \ ۱)$$

منحنی AOB نمودار $y = \mathrm{Arc}\sin x$

منحنی $A'OB'$ نمودار $y = \sin x$

دو منحنی نسبت به‌نیمساز ربع اول وسوم قرینه و درمبدأ مختصات برهم ممـاس و مماس مشترکشان نیمساز ربع اول و سوم است.



مثال۲- تابع $f(x)=x^{۲}+۱$ با شرط $x\geqslant ۰$ مفروض‌است. تابع معکوس f رانوشته و صحت تساوی $(f^{-۱})'=\frac{۱}{f'}$ را در نقاطی که $f'(x)\neq ۰$ تحقیق کنید.

حل- دستور تابع $f^{-۱}$ ازروی دستور f چنین‌است: $f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱}$ دامنهٔ تعریف وبرد f یعنی فاصله‌های $[۰ ,+\infty[$ و $[۱ ,+\infty[$ به ترتیب برد و دامنهٔ تعریف $f^{-۱}$ خواهندبود ازهر دو تابع مشتق میگیریم.

$$f(x)=x^{۲}+۱ \Longrightarrow f'_x=۲x$$

$$f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۱} \Longrightarrow (f^{-۱}(x))'=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}$$

$$(f^{-۱}(y))'=\frac{۱}{۲\sqrt{y-۱}}=\frac{۱}{۲\sqrt{(x^{۲}+۱)-۱}}=\frac{۱}{۲|x|}=\frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{f'(x)} \text{ و } x>۰$$

یعنی :

$$(f^{-۱})'=\frac{۱}{f'} \quad \text{یا} \quad f'.(f^{-۱})'=۱ \text{ و } x>۰$$

مثال۳- تابع $y=x^{۳}$ مفروض است.

الف: از نقطهٔ B به‌طول ۲ واقع برمنحنی (C) نمایش تابع فوق خطی بر منحنی مماس شده است. معادلهٔ خط مماس را بنویسید.

ب: از نقطهٔ B' متناظر نقطهٔ B روی منحنی (C') نمایش تـابع معکوس تابع فوق خطی بر منحنی (C') مماس شده است. معادلهٔ مماس را بنویسید.

ج: معادلهٔ تابع معکوس تابع فوق را تعیین ونمودار دومنحنی را در فاصلهٔ [۰و۲] (دامنهٔ تابع اول) رسم کنید:

حل- الف: داریم B(۲و۸)چون $y'=۳x^{۲}$، پس‌ضریب زاویه‌ای مماس‌برمنحنی (C) درB خواهد بود:

$m=y'_B=۱۲$ ضریب زاویه مماس

پس معادلهٔ مماس در B خواهد بود:

$$y-۸=۱۲(x-۲) \quad \text{یا} \quad y=۱۲x-۱۶$$

ب: داریم B'(۸و۲) وهمچنین $y'_{B'}=\frac{۱}{y'_B}$ یا $m=\frac{۱}{۱۲}$ ضریب زاویه مماس درB' .

پس معادلهٔ مماس درB' برمنحنی تابع معکوس‌که قرینهٔ مماس اولی نسبت بـه‌نیمساز ربع اول می‌باشد چنین است :

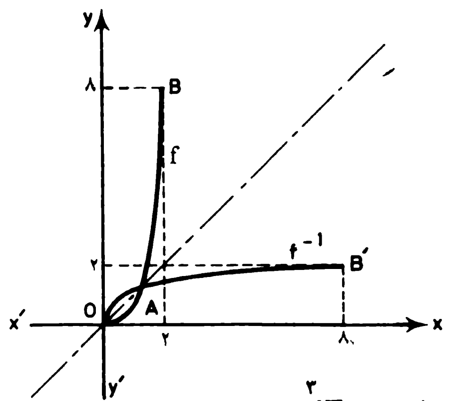
$$y-۲=\frac{۱}{۱۲}(x-۸) \quad \text{یا} \quad y=\frac{۱}{۱۲}x+\frac{۴}{۳}$$

ج: $y' = 3x^2$ بنابراین $y' \geqslant 0$ یعنی تابع فوق به‌ازای جمیع مقادیـر x صعودی است.

بنابراین معکوس دارد و معادله تابع معکوس خواهد بود: $x = \sqrt[3]{y}$ (y متغیر مستقل و x متغیر تابع) پس $y = \sqrt[3]{x}$

در شکل زیر منحنی هردو تابع را دریك دستگاه مختصات رسم کرده‌ایم.

$y = x^3$ و $0 \leqslant x \leqslant 2$ و $0 \leqslant y \leqslant 8$



$y = \sqrt[3]{x}$ و $0 \leqslant x \leqslant 8$ و $0 \leqslant y \leqslant 2$

سه نقطه از منحنی f: B(۲و۸) و A(۱و۱) و O(۰و۰)

سه نقطه‌ازمنحنی f^{-1}: B′(۸و۲) و A(۱و۱) و O(۰و۰)

دومنحنی نسبت به‌نیمساز ربع اول قرینه‌اند.

مثال۴ـ مشتق تابع $y = \mathrm{Arc}\cos x$ را بکمك تابع معکوس تعیین کنید.

حل ـ تابع داده شده درفاصلهٔ [۱و۱ −] پیوسته وهمواره نزولی است:

$y = \mathrm{Arc}\cos x$ ، $x \in [-1, 1]$ ، $y \in [0, \pi]$

پس تابع معکوس دارد:

$x = \cos y$ ، $y \in [0, \pi]$ ، $x \in [-1, 1]$

مـی‌دانیم $y' = \frac{1}{x'}$ و چون $x' = -\sin y$ و $0 \leqslant y \leqslant \pi$ است پس $\sin y \geqslant 0$ وداریم:

$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$

بنا براین:

$$y = \mathrm{Arc}\cos x$$

$$y' = \frac{-۱}{\sqrt{۱ - x^۲}} \quad ، \quad -۱ < x < ۱$$

مثال ۵- تابع بصورت زیر داده شده است:

$$y = \mathrm{Arc}tg x \text{ و } y \in]-\frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{\pi}{۲}[$$

مشتق تابع را با استفاده از تابع معکوس آن تعیین کنید.

حل- وقتی x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند y از $\frac{-\pi}{۲}$ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند و تابع همواره معین وصعودی است پس معکوس دارد و معکوس آن $x = tg y$ است که در آن y متغیر مستقل و x متغیر تابع است بنا براین $y' = \frac{۱}{x'}$ اما:

$$x' = ۱ + tg^۲ y = ۱ + x^۲$$

$$y' = \frac{۱}{۱ + x^۲}$$

$$\begin{cases} y = \mathrm{Arc}tg x \\ y' = \dfrac{۱}{۱ + x^۲} \end{cases}$$

مثال ۶- تابع f بصورت زیر داده شده است:

$$y = \mathrm{Arc}cotg x \quad ، \quad y \in]\circ \text{ و } \pi[$$

مشتق آنرا با استفاده از تابع معکوس آن بدست آورید.

حل- وقتی‌که x از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند y از π تا صفر نزول می‌کند و تابع همواره معین و پیوسته و نزولی است پس معکوس دارد و تابع معکوس آن $x = cotg y$ است (y متغیر مستقل).

می‌دانیم $y' = \frac{۱}{x'}$ اما:

$$x' = -(۱ + cotg^۲ y) = -(۱ + x^۲)$$

$$y' = \frac{-۱}{۱ + x^۲}$$

بنا براین:

$$\begin{cases} y = \mathrm{Arc}cotg x \\ y' = \dfrac{-۱}{۱ + x^۲} \end{cases}$$

مثال۷- تابع $y\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و $y = \mathrm{Arc}\sin u$ و $u = f(x)$ مفروض‌اند. مشتق y را نسبت به‌متغیر x بدست‌آورید.

حل:

$$y = \mathrm{Arc}\sin u$$
$$u = \sin y$$

طبق مشتق تابع معکوس داریم:

$$y'_u = \frac{1}{u'_y}$$
$$u'_y = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - u^2}$$
$$y'_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$$

واز طرفی طبق مشتق تابع، تابع داریم:

$$y'_x = y'_u \times u'_x$$
$$y'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \times u'_x$$

پس $u = f(x)$ و $y = \mathrm{Arc}\sin u$ داریم:

$$\boxed{y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}}$$

بهمین ترتیب مشتق $y = \mathrm{Arc}\cos u$ برابر $y' = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$ ومشتق $y = \mathrm{Arc}tg u$ برابر $y' = \frac{u'}{1 + u^2}$ و مشتق $y = \mathrm{Arc}cotg u$ برابر $y' = -\frac{u'}{1 + u^2}$ است.

تمرین

تابعهای زیر داده شده‌اند. مشتق آنها را تعیین کنید.

۱) $y = \mathrm{Arc}\sin 2x$ ۲) $y = \mathrm{Arc}\cos 3x$

۳) $y = \mathrm{Arc}tg 2x$ ۴) $y = \mathrm{Arc}cotg 2x$

۵) $y = \mathrm{Arc}\sin ax$ ۶) $y = \mathrm{Arc}\sin ax + \mathrm{Arc}\cos ax$

۷) $y = \mathrm{Arc}tg mx + \mathrm{Arc}tg nx$ ۸) $y = (\mathrm{Arc}\sin x)^3$

۹- مشتق تابع با ضابطهٔ $y = (\mathrm{Arc}tg x)^2$ را به‌ازای $x = 1$ تعیین کنید.

۱۰- معادلهٔ مماس برمنحنی نمایش تابع $y = \mathrm{Arc}tg 3x$ را درنقطه‌ای‌از منحنی به طول $\frac{1}{3}$ بنویسید.

۱۱ـ تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{x^{3}+1}$ داده شده است؛

الف ـ مطلوبست تعیین دامنهٔ تعریف و برد آن.

ب ـ تابع معکوس ومشتق آنرا تعیین کنید.

ج ـ معادلهٔ خط مماس برمنحنی فوق را درنقطهٔ A بهطول ۲ وهمچنین معادلهٔ خط قائم بر منحنی نمایش تابع معکوس را در نقطهٔ A' متناظر A تعیین کنید .

۱۲ـ تابع با ضابطهٔ $y=x+\frac{1}{x}$ مفروض است. درهریك از حالات $x>1$ و $x<-1$ تابع معکوس و مشتق آنرا تعیین کنید.

۱۳ـ تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x+2}{2x-3}$ داده شده است . نمودار این تابع ونمودارمعکوس آنرا در یك دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۴ـ مشتق توابع زیر را بدست آورید:

$$y=\mathrm{Arc}\sin 2x\sqrt{1-x^{2}}$$

$$y=\mathrm{Arc}tg\,\frac{2x}{1-x^{2}}$$

$$y=\mathrm{Arc}\cos\frac{2x}{1+x^{2}}$$

$$y=\mathrm{Arc}tg\,\frac{x-a}{1-ax}$$

۱۵ـ اگر $y=(\sqrt{x}-\sqrt{x-a})^{m}$ و $z=(\sqrt{x}+\sqrt{x-a})^{m}$ باشد نشان دهید

$$y'z+z'y=0$$

۳ـ۹ـ کاربرد مشتق در تعیین یکنوا بودن، اکسترمم نسبی

قضیه ـ تابع f درهرفاصله‌ای که مشتق آن یعنی f' مثبت باشد(مگراحیاناً درتعداد باپایانی نقطه صفر شود) صعودی، و درهرفاصله‌ای که مشتق آن منفی باشد (مگر احیاناً در تعداد با پایانی نقطه صفرشود) نزولی، و درهر فاصله‌ای که مشتق آن برابرصفرباشد، مقداری ثابت است.

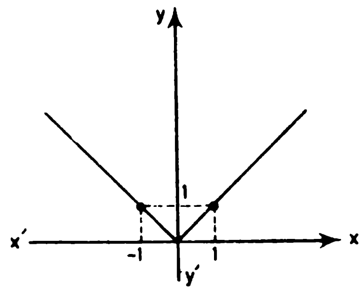
۳ـ۱۰ـ نقاط اکسترمم یك تابع

تعریف ـ فرض کنید f درx_0 پیوسته باشد. اگر f' درسمت چپ و نزدیك x_0 مثبت‌و درسمت راست ونزدیك x_0 منفی باشد میگویند تابع f در x_0 دارای یك ماکزیمم نسبی است. و اگر f'

در سمت‌چپ ونزدیك x_0 منفی و در سمت راست ونزدیك x_0 مثبت باشد. میگویند تابع f در x_0 دارای یك می‌نیمم نسبی است. اگر تابع f در نقطه x_0 دارای یك ماکزیمم نسبی یا می‌نیمم نسبی باشدگویند تابع f در نقطه x_0 دارای یك اکسترمم نسبی است.

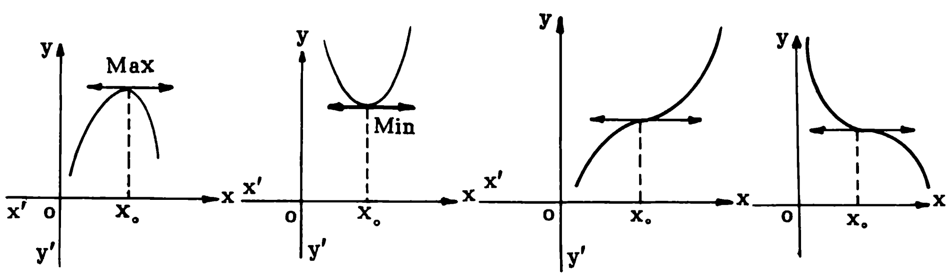
نکته۱: اگر تابع f در x_0 دارای اکسترمم نسبی و مشتق‌پذیر باشد. داریم $f'(x_0) = 0$ ولی باید توجه کردکه ممکن است تابع در نقطه x_0 دارای اکسترمم نسبی باشد ولی $f'(x_0)$ برابر صفر نباشد.

مثلاً- تابع $y = |x|$ درنقطه $x_0 = 0$ دارای می‌نیمم است ولی مشتق تابع در این نقطه برابر صفر نیست.



نکته ۲- اگر هنگامی‌که x نمو می‌کند، $f'(x)$ با تغییر علامت در نقطه x_0، صفر شود، f در x_0 اکسترمم است واگر $f'(x)$ در x_0، صفرشده ولی تغییرعلامت ندهد، نقطه $M_0(x_0, f(x_0))$ نقطه عطف است.

نکته ۳- اگر(C) منحنی‌نمایش تابع f باشد وعدد حقیقی x_0 وجود داشته باشد، بطوریکه $f'(x_0) = 0$ باشد، مماس برمنحنی (C) در نقطه $M_0(x_0 \text{ و } f(x_0))$ موازی محورxهاست.



۳-۱۱- بررسی جهت تغییرات یك تابع

برای بررسی جهت تغییرات تابع f، دستورات زیر را بکار می‌بریم.

الف- f' مشتق تابع را حساب نموده، دامنهٔ تعریف f' را بەفـواصلی که درآن فـواصل

علامت مشتق ثابت و تابع یکنواست تقسیم می‌کنیم (البته این بررسی وقتی امکان دارد که تابع f در فواصلی یکنوا باشد).

ب- مقدار تابع را در ابتدا و انتهای فواصل تعیین شده بدست می‌آوریم .

ج- از یك جدول برای مشخص نمودن علامت مشتق و فواصل یکنوائی و مختصات نقاط ماکزیمم و می‌نیمم استفاده می‌کنیم.

مثال ۱- جهت تغییرات و مختصات نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع بـا ضابطهٔ $y=x^{۳}-۳x^{۲}+۲$ را معین کنید.

حل- دامنهٔ تعریف تابع $D_f=R$ ومشتق آن $y'=۳x^{۲}-۶x=۰$ بازای $x=۰$ و $x=۲$ صفر شده و تغییر علامت می‌دهد.

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۲	↘	−۲	↗	$+\infty$

مثال ۲- جهت تغییرات ومختصات نقاط‌اکسترمم تابع با ضابطهٔ $y=x^{۴}-۴x^{۳}+۴x^{۲}$ را معین کنید.

حل - $$y'=۴x^{۳}-۱۲x^{۲}+۸x=۴x(x^{۲}-۳x+۲)=۰$$

مشتق بازای $x=۰$ و $x=۱$ و $x=۲$ صفرشده و تغییر علامت می‌دهد.

y	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
y'		−	۰	+	۰	−	۰	+	
y	$+\infty$	↘	۰	↗	۱	↘	۰	↗	$+\infty$

مثال ۳- جهت تغییرات ومختصات نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع باضابطهٔ $y=x+۱+\frac{۴}{x^{۲}}$ رامعین کنید.

حل: $$y'=\frac{x(x^{۳}-۸)}{x^{۴}} \quad و \quad D_f=R-\{۰\}$$

علامت مشتق بستگی به‌علامت صورت دارد. $x(x^{۳}-۸)=۰$ ومشتق بازای $x=۰$ و $x=۲$ تغییرعلامت میدهد.

$f(۲)=۳$

$$\lim_{x\to ۰} f(x) = \lim_{x\to ۰} \left(x+۱+\frac{۴}{x^۲}\right) = +\infty$$

در نقطه $x=۰$ تابع اکسترمم ندارد زیرا تابع در این نقطه تعریف نشده و منفصل است.

x	$-\infty$		۰		۲		$+\infty$
y'		+	‖	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	۳	↗	$+\infty$

مثال ۳- جهت تغییرات ومختصات نقاط اکسترمم تابع باضابطهٔ $y=(x^۲-۱)^۳$ رامعین کنید.

حل- دامنهٔ تعریف تابع $D_f=R$ و $y'=۶x(x^۲-۱)^۲=۰$ مشتق بازای $x=۰$ و $x=\pm۱$ صفر شده ولی فقط در نقطه $x=۰$ تغییرعلامت می‌دهد.

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		−	۰	−	۰	+	۰	+	
y	$+\infty$	↘	۰	↘	-۱	↗	۰	↗	$+\infty$
			عطف		می‌نیمم		عطف		

مثال۴- جهت تغییرات و مختصات نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع با ضابطهٔ

$y=\sqrt[۳]{x^۳-۳x^۲}$ رامعین کنید.

حل- دامنهٔ تعریف تابع $D_f=R$ و $y'=\dfrac{۳x^۲-۶x}{۳\sqrt[۳]{(x^۳-۳x^۲)^۲}}$ علامت مشتق بستگی به‌علامت صورت کسر دارد.

ومشتق بازای $x=۰$ و $x=۲$ تغییرعلامت می‌دهد، ولی‌مشتق در نقطه $x=۰$ معنی ندارد.

$f(۲)=-\sqrt[۳]{۴}$ و $f(۰)=۰$

$$\lim_{x\to ۰^-} f'(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f'(x)=-\infty$$

x	$-\infty$		۰			۲		$+\infty$
y'	+	$+\infty$ | $-\infty$	−		۰		+	
y	$-\infty$	↗	۰	↘	$-\sqrt[۳]{۴}$	↗		$+\infty$

مثال۵- جهت تغییرات ومختصات نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم تابع با ضابطهٔ $y=۱+x^۲+\sqrt{۱-x^۲}$ را معین کنید.

حل- دامنهٔ تعریف تابع $D_f=[-۱ \text{ و } ۱]$ ومشتق آن.

$$y'=x(۲-\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}})$$

برای تعیین علامت مشتق طرفین تساوی را درمزدوج عبارت داخل پرانتز که $(۲+\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}})>۰$ است ضرب میکنیم.

نتیجه می‌شود:

$$y'(۲+\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}})=x(۴-\frac{۱}{۱-x^۲})$$

$$y'(۲+\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}})=\frac{x(۳-۴x^۲)}{(۱-x^۲)}$$

بنابراین علامت مشتق بستگی به‌علامت صورت‌کسر طرف دوم دارد زیرا مخرج کسر مثبت است. ومشتق‌بازای $x=۰$ و $x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ صفر شده تغییرعلامت‌می‌دهد.

x	-۱		$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$		۰		$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$		۱
y'	∞	+	۰	−	۰	+	۰	−	∞
y	۲	↗	۲/۲۵	↘	۲	↗	۲/۲۵	↘	۲

مثال۶- جهت تغییرات ومختصات‌نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم تابع‌باضابطهٔ $y=|x^۲-۲x|$ را معین کنید.

حل ـ دامنهٔ تعریف تابع $D_f = R$ وضابطهٔ تابع را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & (x \geqslant 2 \text{ یا } x \leqslant 0) \\ 2x - x^2 & (0 < x < 2) \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & (x > 2 \text{ یا } x < 0) \\ 2 - 2x & (0 < x < 2) \end{cases}$$

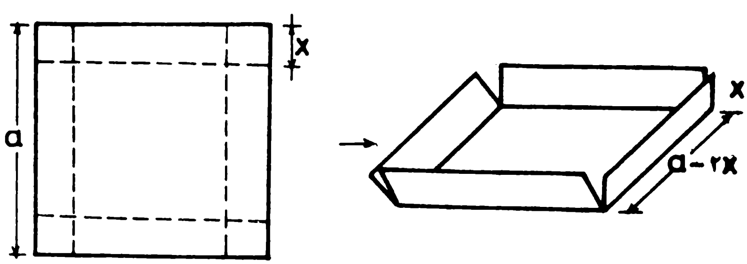
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

مشتق این تابع در نقاط $x = 0$ و $x = 2$ بدون صفر شدن تغییر علامت می‌دهد. در نتیجه تابع در نقاط $x = 0$ و $x = 2$ مشتق پذیر نیست ولی دراین‌نقاط دارای می‌نیممی برابر صفر و در نقطه $x = 1$ دارای ماکزیممی برابر یك مـــی‌باشد.

۳-۱۲- موارد استعمال مشتق در تعیین اکسترمم در امور فنی

مثال ۱- صفحهٔ مقوایی است مربع شکل به‌ضلع a می‌خواهیم ازهرگوشهٔ آن مربعی ببریم و آن را خم کنیم تاجعبه‌ای‌کامل شود. مطلوب است تعیین.ضلع مربع گوشه‌ها برای آن‌که حجم جعبه ماکزیمم باشد.

حل ـ اگر طول ضلع مربع گوشه‌ها x باشد ضلع قاعده‌جعبه $a - 2x$ خواهد بود در این صورت اگر حجم جعبه را v بگیریم:



$$v = (a - 2x)^2 x$$

یا:

$$v = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$$

برای تعیین ماکزیمم یامینیمم تابع v ازآن مشتق می‌گیریم:

$$V' = 12x^2 - 8ax + a^2$$

مشتق‌را مساوی صفر قرار داده جوابهای‌آن را به دست می‌آوریم :

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0$$

$$x = \frac{4a \pm \sqrt{16a^2 - 12a^2}}{12} = \frac{4a \pm 2a}{12} = \frac{a}{2} \text{ و } \frac{a}{6}$$

حجم جعبه یا مقدار تابـع در صفر و $\frac{a}{2}$ برابر صفر می‌شود. و باتوجه به این که‌حجم‌قوطی نمی‌تواند منفی باشد این مقدار مینیمم‌حجم است .

توجه‌کنید $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$ یعنی x در فاصلهٔ $(\frac{a}{2}$ و $0)$ است.

x	0		$\frac{a}{6}$		$\frac{a}{4}$		$\frac{a}{3}$		$\frac{a}{2}$
y′	$+$		0		$-$		$-$		0
y	0	$\nearrow$	$\frac{2a^3}{27}$ ماکزیمم	$\searrow$	$\frac{a^3}{16}$	$\searrow$	$\frac{a^3}{27}$	$\searrow$	0

حجم جعبه چنان‌که می‌بینید در $x = \frac{a}{6}$ ماکزیمم می‌شود.

مثال ۲ـ با مقدار معینی فلز می‌خواهیم ظرفی استوانه شکل با ضخامت معین بسازیـم به قسمی که‌گنجایش آن ماکزیمم باشد ارتفاع استوانه را برحسب شعاع قاعدهٔ آن حساب‌کنید.

حل‌ـ می‌دانیم سطح‌کل استوانه $s = 2\pi rh + 2\pi r^2$ و حجم‌آن $v = \pi r^2 h$ است (r شعاع قاعده و h ارتفاع است) مطابق صورت مسئله s مقداری ثابت است و ما مـی‌خواهیم باتوجه به این موضوع v ماکزیمم باشد.

ازفرمول مساحت، ارتفاع را برحسب مساحت و شعاع حساب می‌کنیم:

$$h = \frac{s - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

پس:

$$v = \pi r^2 \times \frac{s - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{sr}{2} - \pi r^3$$

مشتق تابع v را نسبت به‌متغیر r حساب‌کرده برابر صفر می‌گیریم:

$$v' = \frac{s}{۲} - ۳\pi r^۲ = ۰$$

ازاینجا نتیجه می‌شود:

$$r = \sqrt{\frac{s}{۶\pi}}$$

پس:

$$h = \frac{s - ۲\pi r^۲}{۲\pi r} = s \times \frac{\frac{۲}{۳}}{۲\pi\sqrt{\frac{s}{۶\pi}}} = ۲\sqrt{\frac{s}{۶\pi}} = ۲r$$

پس باید ارتفاع این استوانه با قطر قاعدهٔ آن برابر باشد.

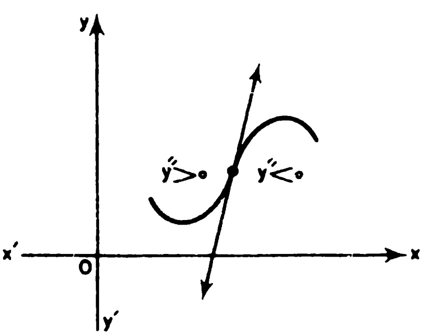
۳-۱۳- تقعر و تحدب منحنی، نقطه عطف

قضیه- تقعر منحنی (C) نمودار تابع f دریک فاصله به سوی yهای مثبت است هرگاه: در آن فاصله $f''(x) > ۰$ باشد به‌سوی yهای منفی است هرگاه: درآن فاصله $f''(x) < ۰$ باشد.

نقطه‌ای از منحنی را کــه درآن نقطه سوی تقعر منحنی عوض می‌شود و دارای مماس نیز باشدنقطهٔ عطف منحنی می گویند. بنابراین نقطهٔ $(a, f(a))$ نقطه عطف منحنی تابع f است اگر:

اولاً : تابع f در $x = a$ پیوسته و منحنی در $(a, f(a))$ دارای خط مماس باشد.

ثانیاً : f'' در همسایگی a تغییر علامت بدهد.



با توجه به‌تعریفی که برای جهت تقعر منحنی کردیم معلوم می‌شود :

مماس برمنحنی درنقطه عطف ازآن عبور می کند.

مثال: جهت تقعر و مختصات نقاط عطف تابع باضابطهٔ $y = x^4 - 6x^2$ را معین کنید.

حل: $y' = 4x^3 - 12x$ و $y'' = 12x^2 - 12 = 0$

مشتق ثانی تابع بازای $x = 1$ و $x = -1$ تغییرعلامت می‌دهد.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
		تقعر بسوی بالا	عطف	تقعر بسوی پائین	عطف	تقعر بسوی بالا	

نقاط $A\begin{vmatrix} x = 1 \\ y = -5 \end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix} x = -1 \\ y = -5 \end{vmatrix}$ نقاط عطف تابع‌اند.

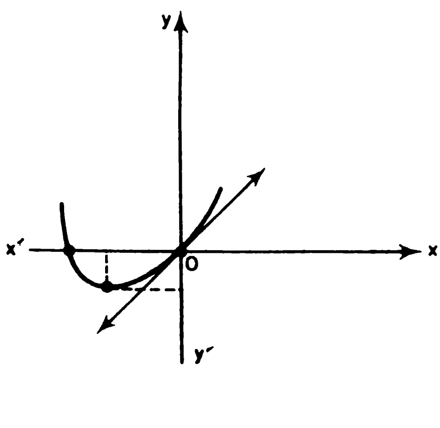
توجه: اگر مشتق ثانی تابع در نقطه x_0، صفر شود ولی تغییرعلامت ندهد، نقطهٔ بطول x_0 را نقطه méplat می‌گویند.

مثلا: در تابع $y = 2x^4 + x$، مشتق ثانی:

$y' = 8x^3 + 1$ ، $y'' = 24x^2 = 0$

بازای $x = 0$ ، صفر شده ولی تغییرعلامت نمی‌دهد.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y''		$+$	0	$+$	
		تقعر بسوی بالا		تقعر بسوی بالا	



تمرین

۱ـ جهت تغییرات، و مختصات نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم هریك‌ازتوابع زیررا مشخص کنید.

$$y = \frac{x^3}{x-1} \qquad y = \frac{(x^2-1)}{(x-2)^2}$$

$$y = x^2(x-1)^3$$

$$y = x\sqrt{2-x^2}$$

۲ـ جهت تقعر و مختصات نقاط عطف هریك ازتوابع زیر را معین کنید.

$$y = \frac{9(1-x)}{x^3}$$

$$y = \sqrt[3]{x^2-1}$$

$$y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

۳ـ تابع f باضابطهٔ $f(x) = \dfrac{ax^2-bx}{2x^2+1}$ مفروض است. $(a \neq 0)$

اولا: تحقیق کنید که این تابع همواره دارای‌یك ماکزیمم یا یك می‌نیمم است.

ثانیاً: a و b را چنان معین کنید که نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم تابع (۲ و۱ −) باشد.

۴ـ ثابت کنید تابع $y = \sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ در مبداء مختصات دارای می‌نیمم است ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۵ـ نشان دهید که منحنی (C) نمایش تابع f باضابطهٔ $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ دارای سه نقطه عطف بر یك استقامت می‌باشد.

۶ـ تابع f باضابطهٔ $f(x) = x^4 - 2x^2$ مفروض است.

اولا: جهت تغییرات ومختصات نقاط ماکزیمم ومی‌نیمم آنرا تعیین کنید.

ثانیاً: سوی تقعر ومختصات نقاط عطف آنرا نیز تعیین‌کنید.

۷ـ درتابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ مقادیر a و b و c و d را چنان تعیین‌کنید‌که نقطه M(۲و۰) نقطه ماکزیمم و نقطه F(۰و۱) نقطه عطف نمودار تابع فوق باشد.

۸ـ یك ورقهٔ مقوا به‌شکل مستطیل وبه‌مساحت ثابت a^2 را به چه ابعادی انتخاب کنیم تا بتوان باآن مکعب مستطیلی به ارتفاع ثابت h بسازیم که دارای حجم ماکزیمم باشد (ازهرگوشهٔ

آن ورقه مربعی به‌ضلع h بریده و آنرا تا کرده‌ایم).

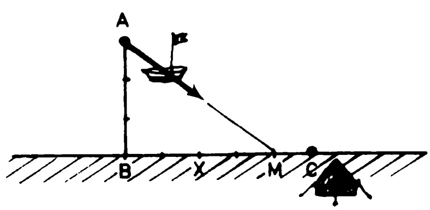
۹ ـ ثابت‌کنید که یك چادر مخروطی برزنتی باحجم معین وقتی کمترین مقدار برزنت را لازم دارد که نسبت ارتفاع آن به شعاع قاعده $\sqrt{۲}$ باشد.

۱۰ـ بین مثلثهـای متساوی‌الساقین محاط در دایـره ، محیط مثلث متساوی‌الاضلاع از محیط مثلثهای دیگر بیشتر است .

۱۱ـ تحقیق کنید بین استوانه‌های دوارکه درداخل کـرهٔ به شعاع R محـاط است آنکه ارتفاعش $\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ است حجمش از دیگر استوانه‌ها بیشتر است.

۱۲ـ میخواهیم یك‌قوطی دربازی بسازیم که حجم آن یك لیتروشکل آن منشور مربع‌القاعده باشد. ابعاد آنرا طوری به دست آورید که مصالح بکار رفته می‌نیمم بـاشد (سطح آن مـی‌نیمم باشد.)

۱۳ـ درشکل زیر نقطه A یك کشتی و خط BC ساحل را نشان می‌دهد . فاصله کشتی از ساحل ۹ کیلومتر و فاصله C (محل یك اردو) از B (نزدیکترین نقطه ساحل به کشتی) ۱۵ کیلومتر است یك‌نفر ازکشتی که قایقی دراختیار دارد می‌خواهد به‌محل اردو رفته یك‌پیام فوری به‌سرپرست اردو برساند درصورتی که سرعت او باقایق ۴ کیلومتر درساعت و پیاده ۵ کیلومتر درساعت باشد در فاصله چندکیلومتری B پیاده شود تادرکمترین مدت به‌اردو برسد.



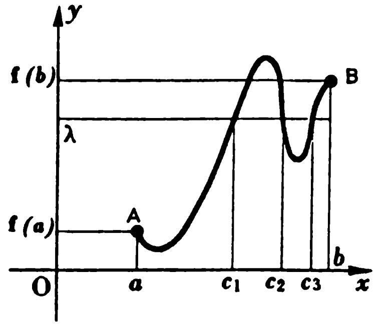
فصل ۴

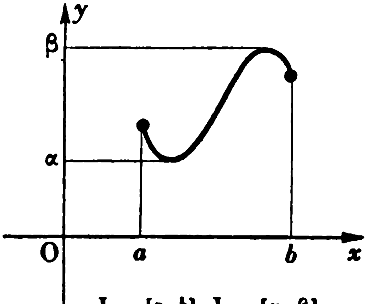
خط مجانب

۴-۱- بررسی تابع در کرانه‌ها

فرض کنید تابع حقیقی f، روی دامنهٔ تعریف D_f، معین باشد. و D_f دامنهٔ تعریف تابع به فاصله‌هائی نظیر I_n که تابع درآن فاصله‌ها، پیوسته، یکنواست، تقسیم شده باشد. هریک ازفاصله‌های نظیر I_n دو کرانه دارد (که احتمالا ممکن است بینهایت باشد) بررسی تابع f در همسایگی این دو کرانه متفاوت را، بررسی روی کرانه‌های f می‌گویند. اگر a یک کرانه I_n باشد حالتهای زیر را خواهیم داشت:

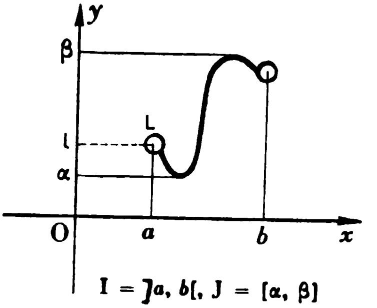
الف- اگر $a \in I_n$ باشد می‌گویند نقطه $A(a$ و $f(a))$ نقطهٔ توقف منحنی است.





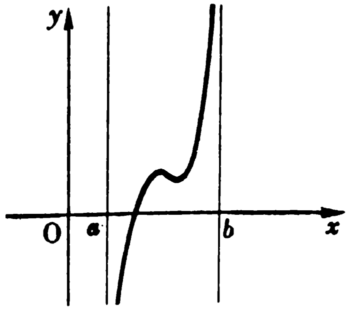
$I = [a, b],\ J = [\alpha, \beta]$

ب- اگر $a \notin I_n$ و $(l \in R)$ و $\lim_{x \to a} f(x) = l$ باشد می‌گویند نقطه$(l$ و $a)L$ نقطه‌حد منحنی است.



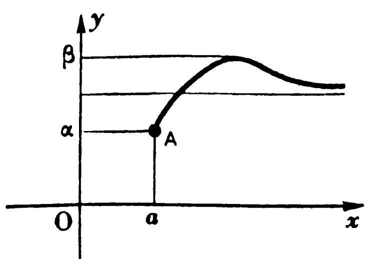
$I =]a, b[,\ J = [\alpha, \beta]$

ج- اگر $a \notin I_n$ و تابع در a حد باپایان (چپ و راست) نداشته باشد در آن صورت یك شاخه بینهایت داریم.



$I =]a, b[, J = \mathbb{R}$

د - اگر a بینهایت باشد یعنی $a \in \{-\infty$ و $+\infty\}$ بررسی شاخه‌های بینهایت مطرح می‌شود.



$I = [a, +\infty[, J = [\alpha, \beta]$

خط مجانب

۴-۲- شاخه بی‌نهایت منحنی - گوئیم منحنی نمایش تابع $y=f(x)$ دارای شاخهٔ بی نهایت است هرگاه نقطه یانقاطی روی منحنی وجود داشته باشدکه لااقل یکی از مختصات آن (طول یاعرض یاهردو) به سمت بی‌نهایت میل کند.

مثال ۱ - منحنی نمایش $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ دارای شاخه بی نهایت است زیرا:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = 0$$

مثال ۲- منحنی نمایش $y = 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$ دارای شاخه‌های بی‌نهایت است زیرا داریم:

$$\begin{cases} x \to -\infty \\ y \to 1 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x \to +\infty \\ y \to 1 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x \to 2 \\ y \to +\infty \end{cases}$$

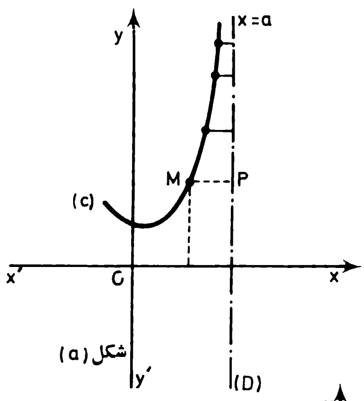
مثال ۳ - منحنی نمایش $y=x+\frac{1}{x^2+1}$ دارای شاخه‌های بی‌نهایت است زیرا:

$$\begin{cases} x\to -\infty \\ y\to -\infty \end{cases} \quad و \quad \begin{cases} x\to +\infty \\ y\to +\infty \end{cases}$$

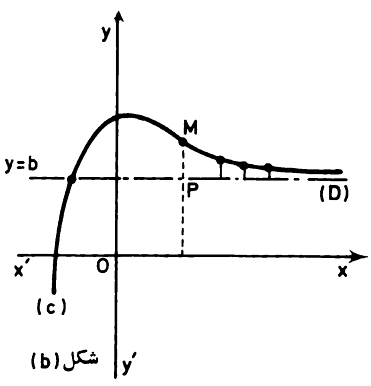
۴-۳- تعریف خط مجانب: هرگاه منحنی (C) نمایش تابع $y=f(x)$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت باشد خط(D) را مجانب آن شاخه گوئیم درصورتی که فاصلهٔ نقطهٔ متغیر M ازآن شاخه تا آن خط وقتی که نقطه روی آن شاخه بی‌نهایت دورشود به‌سمت صفر میل کند.

در شکلهای زیر هریك از منحنیها دارای شاخهٔ بی‌نهایت است و حالتهای مختلف مجانب را نشان می‌دهند.

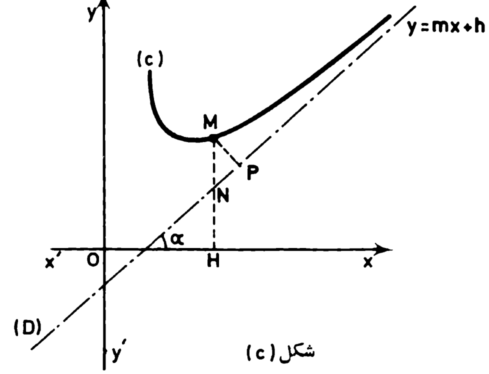
خط مجانب منحنی، ممکن است موازی محور y ها باشد که دراین صورت آنرا اصطلاحاً مجانب قائم گویند شکل (a)، و ممکن است موازی محور x ها باشد، که در این صورت اصطلاحاً آنرا مجانب افقی گویند شکل (b)، و ممکن‌است محورهای مختصات را قطع کند که در این‌صورت اصطلاحاً آنرا مجانب مایل گویند شکل (c). خط مجانب منحنی ممکن‌است **منحنی را دریك یاچند نقطه قطع کند** شکل (b)



شکل (a)



شکل (b)



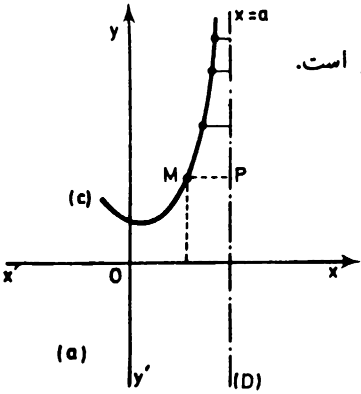
شکل (c)

۴-۴- مجانب قائم

قضیه I- اگر در تابع $y=f(x)$ حد چپ یا حد راست یا حد تابع وقتی که x به‌سمت a میل می‌کند برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود یعنی:

$$\begin{cases} x\to a \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to a^{+} \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to a^{-} \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases}$$

خط D به معادلهٔ $x=a$ مجانب قائم منحنی است.



اثبات- فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه $M(x,y)$ از منحنی تا خط (D) عبارتست از:

$MP=|x-a|$، حال اگر نقطهٔ M روی منحنی بی‌نهایت دور شود یعنی $y=f(x)\to+\infty$ یا $y\to-\infty$ بنا به فرض داریم $x\to a$ یا $|x-a|\to 0$ یعنی فاصله MP به سمت صفر میل کند و خط D مجانب منحنی خواهد بود. اثبات حالتهای $x\to a^{+}$ و $x\to a^{-}$ مشابه اثبات فوق است.

از آنچه گفته‌شد نتیجه می‌شود:

برای تعیین معادلهٔ مجانب قائم منحنی تـابع $y=f(x)$ باید a را چنان اختیار کنیم‌که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x\to a^{+} \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to a^{-} \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to a \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases}$$

نتیجه - محور yها وقتی مجانب قائم است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x\to 0^{+} \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to 0^{-} \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to 0 \\ y\to +\infty \text{ یا } -\infty \end{cases}$$

مثال۱- منحنی نمایش تابع باضابطهٔ $y=\frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ دارای مجانب قائم $x=1$ است زیرا:

$$\begin{cases} x \to 1^+ \\ y \to +\infty \end{cases}$$

مثال۲- منحنی نمایش تابع باضابطهٔ $y=\frac{x}{\sqrt{2-x}}$ مجانب قائم $x=2$ دارد زیرا:

$$\begin{cases} x \to 2^- \\ y \to +\infty \end{cases}$$

مثال۳- خط مجانب قائم منحنی تابع $y=\frac{x-4}{(x-3)^2}$ به معادلهٔ $x=3$ است زیرا:

$$\begin{cases} x \to 3 \\ y \to -\infty \end{cases}$$

مثال۴- مجانب قائم منحنی تابع $y=\frac{1}{x}$ خط $x=0$ (محور yها) است:

$$\begin{cases} x \to 0^- \\ y \to -\infty \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x \to 0^+ \\ y \to +\infty \end{cases}$$

مثال۵- منحنی نمایش تابع $y=\frac{-2}{(x-4)(x+1)^2}$ دو مجانب قائم به معادله‌های $x=4$ و $x=-1$ دارد. زیرا:

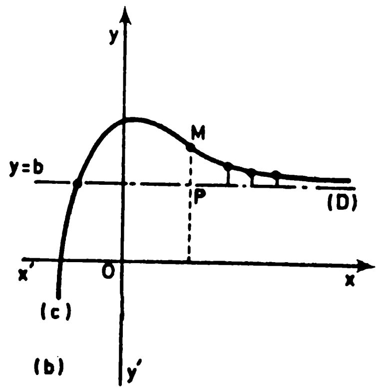
$$\begin{cases} x \to 4^- \\ y \to +\infty \end{cases} ، \quad \begin{cases} x \to 4^+ \\ y \to -\infty \end{cases} ، \quad \begin{cases} x \to -1 \\ y \to +\infty \end{cases}$$

نتیجه: از مثالهای بالا دیده می‌شود، منحنی‌هائی دارای مجانب قائم هستند که ضابطهٔ تابع آنها کسری باشد. برای تعیین معادله مجانب قائم اینگونه منحنی‌ها مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم . ریشه‌های مخرج کسر (درصورت وجود) معادلات خطوط مجانب قائم را مشخص می‌کنند.

۴-۵- مجانب افقی

قضیه II- هر گاه حد تابع $y=f(x)$، وقتی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ برابر b باشد خط D به معادله $y=b$ مجانب افقی منحنی است.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b$$



اثبات - فاصلهٔ نقطه $M(x , y)$ از منحنی تا خط D به معادلهٔ $y=b$ عبارتست از : $MP=|y-b|$. حال اگر M روی منحنی بی‌نهایت دور شود یعنی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ مطابق آنچه درفرض داریم $f(x)=y\to b$ پس $|y-b|\to 0$ یعنی فاصلهٔ MP به‌صفر میل می‌کند وخط D مجانب منحنی خواهد بود .

از آنچه گفته شد نتیجه می‌شود :

برای تعیین مجانب افقی منحنی تابع $y=f(x)$ باید b را قسمی اختیار کنیم که داشته باشیم

$$\begin{cases} x\to+\infty \\ y\to b \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x\to-\infty \\ y\to b \end{cases}$$

نتیجه- محور xها وقتی مجانب منحنی است که داشته باشیم: $\begin{cases} x\to+\infty \\ y\to 0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} x\to-\infty \\ y\to 0 \end{cases}$

مثال۱- مجانب افقی منحنی تابع باضابطهٔ $y=\frac{۲}{x^۲+۴}+۱$ به معادلهٔ $y=۱$ است زیـرا داریم:

$$\begin{cases} x\to\pm\infty \\ y\to ۱ \end{cases}$$

مثال۲- مجانب‌های قائم و افقی منحنی تـابع $y=۳+\frac{۱}{\sqrt{۱-x}}$ عبارتند از $x=۱$ و $y=۳$ چون داریم:

$$\begin{cases} x\to ۱^- \\ y\to+\infty \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x\to-\infty \\ y\to ۳ \end{cases}$$

مثال۳- منحنی نمایش تابع $y=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۴}}$؛

الف ـ مجانب قائم ندارد، زیرا به ازای هر مقدار حقیقی از x این تابع پیوسته بوده و دارای حد با پایان است. (توجه کنید که عبارت مخرج تابع صفر نمی‌شود)

ب ـ دومجانب افقی به معادله‌های $y=+۱$ و $y=-۱$ دارد زیرا:

$$y=\frac{x}{|x|\sqrt{۱+\frac{۴}{x^۲}}}$$

$$x>۰ \Rightarrow y=\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۴}{x^۲}}} \Rightarrow \begin{cases} x\to+\infty \\ y\to+۱ \end{cases}$$

$$x<۰ \Rightarrow y=\frac{-۱}{\sqrt{۱+\frac{۴}{x^۲}}} \Rightarrow \begin{cases} x\to-\infty \\ y\to-۱ \end{cases}$$

۴-۶- مجانب مایل

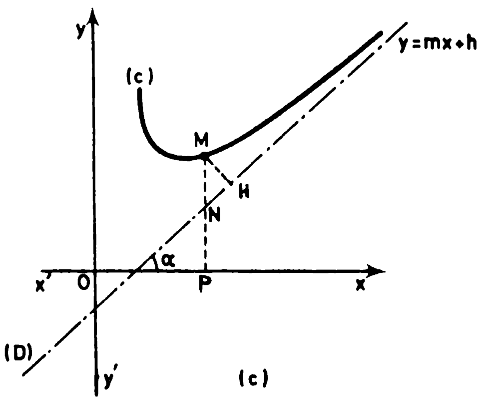
هر گاه حد تابع $y=f(x)$، وقتی که x به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند برابر بینهایت باشد یعنی: $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ یا $-\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ یا $-\infty$ ، ممکن است نمودار تابع $y=f(x)$ دارای مجانب مایلی به معادلهٔ $Y=mx+h$ باشد.

قضیهٔ III- اگر خط D به معادلهٔ $Y=mx+h$ مجانب مایل منحنی تابع $y=f(x)$ باشد داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} y-Y=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}(y-Y)=0$$

اثبات ـ چون خط D مجانب منحنی است پس $\lim_{x\to+\infty} MH\to 0$ یا $\lim_{x\to-\infty} MH=0$.

فرض کنید $\lim_{x\to+\infty} MH=0$ اگر α زاویهٔ خط D با محور Ox باشد چون خط D موازی yy' نیست $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ ودر نتیجه $\cos\alpha\neq 0$.



در مثلث قائم الزاویهٔ MNH داریم $MH=MN\cos\alpha$ چون حد MH وقتی نقطهٔ M روی منحنی بی‌نهایت دور شود صفر است، حد طرف دوم نیز صفر خواهد شد و با توجه به اینکه $\cos\alpha\neq 0$ پس حد MN صفر خواهدشد یعنی داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} MN=\lim_{x\to+\infty}|PM-PN|=\lim_{x\to+\infty}(y-Y)=0$$

اثبات درحالت $\lim_{x\to-\infty} MH=0$ شبیه به فوق‌است.

عکس قضیهٔ III ـ هر گاه تابع $y=f(x)$ وخط D به معادلهٔ $Y=mx+h$ را داشته باشیم به‌قسمی‌که $\lim_{x\to+\infty}(y-Y)=0$ یا $\lim_{x\to-\infty}(y-Y)=0$، آنگاه خط D مجانب منحنی است.

اثبات ـ فرض کنید $\lim_{x\to+\infty}(y-Y)=0$. هرگاه دو نقطهٔ M و N را به ترتیب روی منحنی

وخط D با یک طول انتخاب‌کنیم داریم: $NM=|y-Y|$ وچون نقطه روی منحنی بی‌نهایت

دور شود با استفاده ازفرض داریم: $\lim_{x\to+\infty}|y-Y|=0$ یعنی $\lim_{x\to+\infty}NM=0$ وباتوجه‌به‌رابطهٔ

$MH=MN.\cos\alpha$ که طرف دوم آن به سمت صفر میل می‌کند خواهیم داشت :

$\lim_{x\to+\infty}MH=0$ یعنی خط D مجانب منحنی است.

اثبات درحالتیکه $\lim_{x\to-\infty}(y-Y)=0$ شبیه به‌حالت‌فوق‌است. باتوجه به‌قضیه III وعکس

آن داریم :

شرط لازم وکافی برای‌اینکه‌خط D به معادلهٔ $Y=mx+h$ مجانب مایل منحنی تـابع $y=f(x)$ باشد این است که :

$$\lim_{x\to+\infty}|y-Y|\to0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}|y-Y|=0$$

نتیجه ـ تابعهایی‌که به‌صورت $y=mx+h+\frac{F(x)}{G(x)}$ بوده و درجهٔ صورت کسریعنی

$F(x)$ کمتراز درجهٔ مخرج یعنی $G(x)$ باشد دارای‌مجانب مایل $Y=mx+h$ می‌باشند، زیرا داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}|y-Y|=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}|y-Y|=0$$

۴ـ۷ـ روش تعیین مجانب مایل ـ برای تعیین $y=mx+h$، معادلهٔ خط مجانب مایل

منحنی تابع $y=f(x)$ ، درصورت وجود، کافی‌است مقادیر m و h را تعیین‌کنیم بدقسمی‌که:

$$\lim_{x\to+\infty}(y-mx-h)=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}(y-mx-h)=0$$

برای این‌کار به شرح زیر عمل می‌کنیم . (فقط برای حالت $x\to+\infty$ بحث را ادامه

می‌دهیم وحالت $x\to-\infty$ شبیه به‌آن است):

$$m=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{y-h}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{y}{x}-\frac{h}{x}\right)$$

هرگاه $x \to +\infty$ ، حد $\frac{h}{x}$ برابر صفراست. بنابراین:

$$\boxed{m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x}}$$

پس از تعیین مقدار m از رابطهٔ $\lim_{x \to +\infty} (y - mx - h) = 0$ نتیجه می‌شود:

$$\boxed{h = \lim_{x \to +\infty} (y - mx)}$$

تبصره ۱- در موقع تعیین m و h:

الف: اگر $m = 0$ و h حد معینی داشته باشد، مجانب حاصل افقی و معادله‌اش $y = h$ است.

ب : اگر m یك‌عدد حقیقی و h بینهایت شود طبق تعریف منحنی دارای شاخه‌سهمی‌شکل در امتداد خط D به ضریب زاویهٔ m است. (چون ساده ترین منحنی که‌دارای‌این‌وضع می‌باشد سهمی است به همین خاطر می‌گویند یك منحنی شاخه سهمی شکل دارد.)

مثال: مانند تابع $y = x + \sqrt{x}$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = 1$$

$$h = \lim_{x \to +\infty} (y - mx) = \lim_{x \to +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = +\infty$$

منحنی دارای شاخه سهمی شکل در امتداد $y = x$ می باشد.

ج: اگر m یك عدد حقیقی وعبارت $(y - mx)$ وقتی x به‌سمت ∞ میل می‌کندحد نداشته باشد منحنی در راستای $y = mx$ به بینهایت می‌رود ولی دارای شاخهٔ سهمی مانند نیست.

مثال: مانند تابع $y = x + \sin x$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$$

$h = \lim_{x \to +\infty} (y - mx) = \lim_{x \to +\infty} (x + \sin x - x) =$ حد ندارد

که نمودارآن در راستای $y = x$ به‌بینهایت می‌رود.

د : اگر m بینهایت شود منحنی‌شاخه سهمی مانند در امتداد محورyها دارد.

مثال: مانند تابع $y = x^{۲} - ۱$.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^{۲}-۱}{x} = \pm\infty$$

ه: اگر عبارت $\frac{y}{x}$ وقتی x به‌سمت ∞ میل می‌کند حد نداشته باشد منحنی امتداد مجانب ندارد

تبصرهٔ ۲ــ مجانب مایل $y = mx + h$ را می‌توان مماس برمنحنی (C) نمایش تابع $y = f(x)$ دانست که نقطهٔ تماسش در بی‌نهایت باشد: بنابراین اگر معادله‌های:

$$y = f(x) \quad \text{و} \quad y = mx + h$$

را باهم حل کنیم طول نقاط برخورد خط ومنحنی از معادلهٔ $f(x) - mx - h = ۰$ (۱) بدست می‌آید. حال اگر $f(x)$ یك عبارت جبری برحسب x باشد ، چون معادلهٔ اخیر باید دارای ریشه مضاعف ∞ باشد باید ضرایب دو جملهٔ بزرگترین درجهٔ معادله (۱) را [پس از حذف مخرجها و رادیکالها] مساوی صفر قرار داد تا m و h بدست آید. (درموقعی که تابع $y = f(x)$ گنگ وشامل ریشگی زوج است ، باید طرفین معادله را به توان زوج رساند تا از صورت گنگی خارج شود ، در این صورت باید دقت نمود که مقادیر m و h بدست آمده ریشهٔ خارجی نباشد.)

مثال ۱ــ مطلوبست تعیین معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع باضابطهٔ: $y = x + ۱ + \frac{x}{x^{۲}+۱}$

حل: خط $y = x + ۱$ مجانب مایل تابع است زیرا داریم:

$$y - x - ۱ = \frac{x}{x^{۲}+۱}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (y - x - ۱) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^{۲}+۱} = ۰$$

مثال ۲ــ مطلوب است تعیین معادلات خطوط مجانب منحنی نمایش تابع $y = \frac{x^{۲}-۳}{x+۱}$

حل : خط $x = -۱$ مجانب قائم منحنی تابع است زیرا داریم :

$$\begin{cases} x \to -۱ \\ y \to \pm\infty \end{cases}$$

هرگاه $x \to \pm\infty$ در این صورت $y \to \pm\infty$ پس منحنی مجانب افقی ندارد وچون درجهٔ عبارت صورت یك‌واحد بیش از درجهٔ عبارت مخرج است پس منحنی مجانب مایل‌دارد. تابع را می‌توان بـه‌صورت $y = x - ۱ - \frac{۲}{x+۱}$ نوشت (صورت را بـر مخرج تقسیم کـردیم) بنابراین خط $y = x - ۱$ مجانب مایل منحنی تابع است .

مثال ۳ـ مطلوب است تعیین معادله‌های مجانبهای منحنی تابع $y = \frac{x^۲}{\sqrt{x^۲+۱}}$

حل : چون $x^۲ + ۱ \neq ۰$ پس منحنی مجانب قائم ندارد . همچنین منحنی مجانب افقی ندارد زیرا :

$$\begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to \pm\infty \end{cases}$$

برای تعیین معادلهٔ مجانب مایل باید m و h راپیداکنیم به‌قسمی که:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} \text{ و } h = \lim_{x\to+\infty} (y - mx) \quad \text{یا} \quad m = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} \text{ و } h = \lim_{x\to-\infty} (y - mx)$$

به ترتیب چنین عمل می‌کنیم:

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}} = \frac{x}{|x|\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}}$$

$$m_۱ = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}} = ۱$$

$$m_۲ = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}} = -۱$$

$$h_۱ = \lim_{x\to+\infty} (y - x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^۲}{\sqrt{x^۲+۱}} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۲ - x\sqrt{x^۲+۱}}{\sqrt{x^۲+۱}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۴ - x^۴ - x^۲}{\sqrt{x^۲+۱}\,(x^۲ + x\sqrt{x^۲+۱})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}(x^2+x\sqrt{x^2+1})} = 0$$

$$h_2 = \lim_{x\to-\infty} (y+x) = \dots = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2-x\sqrt{x^2+1})} = 0$$

پس معادله‌های مجانبهای مایل منحنی عبارتند از:

$y=x$ و $y=-x$

مثال ۴ ـ مطلوب‌است تعیین معادله های مجانبهای منحنی تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$

حل : منحنی مجانب قائم ندارد ، مجانب افقی نیز ندارد زیرا :

$$\begin{cases} x\to\pm\infty \\ y\to\pm\infty \end{cases}$$

اگرمعادلهٔ مجانب مایل $y=mx+h$ باشد، از حذف y بین :

$y=mx+h$ و $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$

نتیجه می‌شود:

$$x^3-3x^2+1=m^3x^3+3m^2hx^2+3h^2mx+h^3$$
$$(m^3-1)x^3+3x^2(m^2h+1)+\cdots\cdots=0$$

دوتا از ضرایب بزرگترین‌درجه را صفرمی‌گیریم:

$$\begin{cases} m^3-1=0 \\ m^2h+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ h=-1 \end{cases}$$

پس $y=x-1$ مجانب مایل منحنی تابع است.

تبصره ـ هرگاه دو منحنی (C) و (C′) نمایش تابعهای $y_1=f(x)$ و $y_2=g(x)$ **باشند وداشته‌باشیم:**

$$\lim_{x\to+\infty}(y_1-y_2)=0 \qquad \text{یا} \qquad \lim_{x\to-\infty}(y_1-y_2)=0$$

دو منحنی را مجانب یکدیگر گوئیم.

مثال ـ منحنیهای نمایش دو تابع $y_1=x^2+\frac{1}{x+1}$ و $y_2=x^2$ مجانب یکدیگرند

زیرا :

$$\lim_{x\to\pm\infty}|y_1-y_2| = \lim_{x\to\pm\infty}\left|\frac{1}{x+1}\right| = 0$$

تمرین

معادلات خطوط مجانب هریك از تابعهای زیر را تعیین کنید.

۱) $y=\dfrac{x-3}{x-2}$

۲) $y=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$

۳) $y=\dfrac{3x^2+x-1}{x-1}$

۴) $y=\dfrac{x^3-x^2}{x^2-4}$

۵) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-9}$

۶) $y=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

۷) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}+2$

۸) $y=x-1+\sqrt{x^2-4x+2}$

۹) $y=x+2-\sqrt{x^2+2x+3}$

۱۰) $y=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x}$

۱۱) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x-1}$

۱۲) $y=\dfrac{2x-\sqrt{x^2+1}}{x-2}$

۱۳) $y=\sqrt[3]{x^3+x}$

۱۴) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

۱۵) $y=x-2+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

۱۶) $y=x\sqrt{\dfrac{x-3}{x-2}}$

۱۷) $y=x-2+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$

۱۸) $y=\sqrt{\dfrac{x^4-1}{x^2-4}}$

۱۹) $y=\sqrt{\dfrac{x^3-7}{x-2}}$

۲۰) $y=\mathrm{Arctg}\,x$

۲۱ – تحقیق کنید منحنی (C') به معادلهٔ $y_2=\dfrac{x^2+1}{x}$ مجانب منحنی (C) بـه معادلهٔ $y_1=\dfrac{x^4+x^2+1}{x(x^2+1)}$ می‌باشد،ضمناً تحقیق کنید دو منحنی دارای خطـوط مجانب مشترکند و معادلات آن خطوط را تعیین کنید.

۲۲- تابع باضابطهٔ $y_1=\frac{ax^2+bx+c}{x+2c}$ مفروض‌است:

الف - پارامترهای a و b و c را چنان تعیین‌کنید که منحنی این تابع دارای مجانبهایی به معادلات $x+4=0$ و $y-x+1=0$ باشد.

ب - مجانبهای منحنی تابع $y=\frac{1}{y_1}$ را به‌ازاء مقادیر حاصلهٔ a و b و c که‌در فرض‌الف بدست‌آمده است تعیین کنید.

۲۳- تابع زیر مفروض است:

$$y=2x+a+\sqrt{ax^2+bx+3} \qquad a>0$$

الف - پارامترهای a و b را چنان تعیین کنید که منحنی تابع فوق وقتی $x\to+\infty$ دارای مجانب مایلی به معادلهٔ $y=4x+3$ باشد.

ب- به ازای مقادیر حاصلهٔ a و b مجانب دیگر تابع را تعیین‌کنید.

۲۴- به فرض اینکه t از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند و داشته باشیم:

الف: $\begin{cases} x=\dfrac{t^3}{t^2+1} \\ y=\dfrac{t^2}{t+1} \end{cases}$ ب: $\begin{cases} x=\dfrac{t+2}{t^3-t} \\ y=\dfrac{t}{1-t^2} \end{cases}$ ج: $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

خواهیم داشت $y=f(x)$ ، مطلوبست تعیین معادلات خطوط مجانب منحنی تابع $y=f(x)$

۲۵- تابع $y=ax+b+\sqrt{(px+q)^2+l}$ (که درآن $p>0$) مفروض است.

تحقیق‌کنید منحنی این تابع دارای دو مجانب به معادله‌های ذیل است:

$$\begin{cases} Y_1=ax+b+(px+q) \ ، \ x\to+\infty \\ Y_2=ax+b-(px+q) \ ، \ x\to-\infty \end{cases}$$

(راهنمائی : حد $|y-Y_1|$ را وقتی‌که $x\to\pm\infty$ تعیین‌کنید) .

۲۶- تابع $y=ax+b-\sqrt{(px+q)^2+l}$ که درآن $p>0$ مفروض است.

تحقیق کنید منحنی این تابع دارای دو مجانب به معادله‌های ذیل است:

$$\begin{cases} Y_1=ax+b+(px+q) \ ، \ x\to-\infty \\ Y_2=ax+b-(px+q) \ ، \ x\to+\infty \end{cases}$$

۲۷ـ در تابع $y = ax + b - \sqrt{x^{2} - 2x}$ ضرایب a و b را چنان تعیین کنید وقتی که $x \to +\infty$ مقدار تابع $y = 1$ شود.

خطوط مجانب منحنیهای هریك از توابع ذیل را به‌کمك دستورهائی که از حل مسئلهٔ ۲۵ و ۲۶ یاد گرفتید تعیین کنید.

۲۸) $y = x - 3 + \sqrt{x^{2} - 4x}$

۲۹) $y = 3x - 2 + \sqrt{x^{2} - 2x + 3}$

۳۰) $y = 2x - 1 - \sqrt{4x^{2} - 12x}$

۳۱) $y = 2x - \sqrt{x^{2} - 4x + 3}$

۳۲) $y = 3x - \sqrt{9x^{2} + 9x - 1}$

۳۳) $y = 2 + \sqrt{x^{2} + 1}$

۳۴) $y = \sqrt{x^{2} - 4x}$

۳۵) $y = -x + 2 - \sqrt{x^{2} - 1}$

۳۶ـ تابع با ضابطهٔ $y = mx + n + \sqrt{x^{2} - 6x}$ مفروض است.

الف‌ـ m و n را چنان تعیین کنید که منحنی تابع وقتی $x \to +\infty$ دارای مجانب مایلی به معادلهٔ $y = 2x - 2$ باشد.

ب‌ـ به ازاء مقادیر حاصل m و n مجانب دیگر منحنی را تعیین کنید.

۳۷ـ معادله مجانب مایل هریك از توابع زیر را تعیین نموده وضعیت منحنی نمودار هر تابع را بامجانب مایل آن بررسی کنید.

$$f(x) = \frac{x^{2} + x + 1}{x + 1}$$

$$f(x) = \frac{x^{3}}{(x - 1)^{2}}$$

فصل ۵

رسم نمودار هندسی یك تابع حقیقی

۵-۱- برای رسم‌نمودار یك تابع عددی بامتغیر حقیقی بایدبه‌ترتیب زیرعمل نمود.

۱- تعیین دامنه تعریف، و تعیین فواصلی‌که تابع در آن فاصله‌ها، پیوسته و مشتق پذیر است.

۲- تعیین زوج و فرد بودن تابع ازنقطه نظر تقارن نسبت به‌محور yها ومبدأ مختصات و تشخیص متناوب بودن تابع (درصورت نیاز تعیین دوره تناوب).

۳- تعیین‌جهت تغییرات تابع: برای این‌کارمشتق تابع را حساب‌نموده وفواصلی راکه‌مشتق در آن فواصل مثبت یا منفی یاصفر است تعیین می‌کنیم.

۴- جدول تغییرات:

a- بررسی تابع درکرانه‌های، دامنه تعریف، وفواصل یکنوائی:

برای این‌کار مقدار تابع رادرکرانه‌های دامنه تعریف وکرانه‌های فواصلی که تابع در آن فاصله‌ها یکنوا، پیوسته است تعیین می‌کنیم.

b- تعیین مختصات نقاط مهم:

الف- تعیین مختصات نقاط برخورد منحنی با محورهای مختصات.

ب- درصورت امکان تعیین مختصات نقاط برخورد منحنی با مجانبهای افقی و مایل.

ج: تعیین مختصات نقاطی‌که مشتق درآن نقاط صفرشده و یا تغییرعلامت داده است‌ونقاطی که تابع درآن نقاط مشتق‌پذیر نیست (نظیر نقاط زاویه‌دار یا نقاط بازگشت).

د - درصورت امکان تعیین مختصات نقاط عطف.

c- تنظیم جدول تغییرات تابع:

برای این‌کار جدولی شامل سه‌سطر x و y' و y رسم نموده درسطر اول xهای بدست‌آمده را به‌ترتیب صعودی و درسطر دوم علامت مشتق ودرسطر سوم yهای نظیر xها را نوشته جهت تغییرات تابع را مشخص می‌کنیم.

۵- تعیین معادلات خطوط مجانب:

معادلات خطوط مجانب افقی، قائم، مایل تابع را درصورت وجود تعیین و آنها را رسم می‌کنیم.

۶- نمودار تابع را ازروی جدول بکمك نقطه‌یابی بادقت رسم می‌کنیم.

مثال ۱- نمودار هندسی تابع $x \stackrel{f}{\longmapsto} f(x) = -x^{۳} + ۳x^{۲}$ را رسم کنید.

حل:

دامنه تعریف تابع: $D_f = R$ است و تابع روی دامنهٔ تعریفش، پیوسته ومشتق پذیراست.

جهت تغییرات: مشتق تابع $x \xrightarrow{f'} f'(x) = -۳x^{۲} + ۶x = -۳x(x-۲)$ بازای دو مقدار صفر و ۲، صفر شده تغییرعلامت می‌دهد .

جدول تغییرات تابع:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^{۳}) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^{۳}) = -\infty$$

$$f(۰) = ۰ \qquad f(۲) = ۴$$

مجانبها:

$x \in R$ و $f(x) = ۰$ جوابها $\begin{cases} x = ۰ \\ x = ۳ \text{ و } f'(۳) = -۹ \end{cases}$

داریم:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} (-x^{۲} + ۳x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} (-x^{۲} + ۳x) = -\infty$$

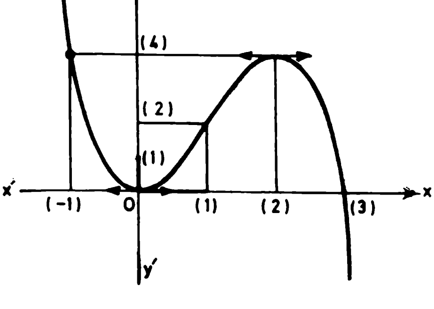
بنابراین نمودار تابع مجانب مایل ندارد.

نقطه عطف:

$$x \stackrel{f''}{\longmapsto} f''(x) = -۶(x-۱)$$

نقطه $H(۱,۲)$ نقطه عطف منحنی است.

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			۰	$+$			۰	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	۴	↘	۰	↗	۲	↗	۴	↘	$-\infty$



نکته: نقطه عطف منحنی درجه سوم، مرکز تقارن آن است.

مثال۲: نمودار هندسی تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{x^۳}{۶} + \frac{x^۲}{۲} + x - ۲$ و $x \in R$ را رسم کنید

حل:

دامنه تعریف: $D_f = R$ و تابع روی R، پیوسته و مشتق پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع $x \overset{f'}{\longmapsto} f'(x) = \frac{x^۲}{۲} + x + ۱$ ، همواره مثبت است.

$f'(x) > ۰$ و $(\forall x \in R)$ و تابع همواره صعودی است .

$$\underset{x \to -\infty}{\text{حد}} f(x) = \underset{x \to -\infty}{\text{حد}} \frac{x^۳}{۶} = -\infty$$

$$\underset{x \to +\infty}{\text{حد}} f(x) = \underset{x \to +\infty}{\text{حد}} \left(\frac{x^۳}{۶}\right) = +\infty$$

$f(۰) = -۲$ و $f'(۰) = ۱$

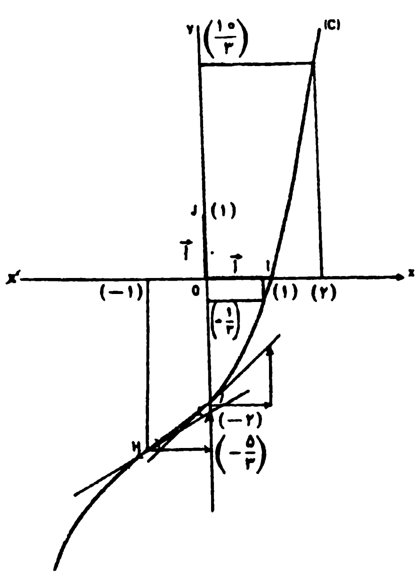
x	$-\infty$		-۱		۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$					$+$				
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{۸}{۳}$	$\nearrow$	$-\frac{۱}{۳}$	$\nearrow$	$\frac{۱۰}{۳}$	$\nearrow$	$+\infty$

مجانبها: تابع مجانب مایل ندارد.

نقطه‌عطف: مشتق ثانی تابع $f'':x \overset{f''}{\longmapsto} f''(x) = x + ۱$ بازای $x = -۱$ تغییرعلامت می‌دهد.

پس منحنی (C) یك نقطهٔ عطف $H(-۱ \text{ و } -\frac{۸}{۳})$ دارد که مرکز تقارن آن هم می‌باشد.

$f'(-۱) = \frac{۱}{۲}$



مثال ۳: جهت تغییرات ومنحنی نمایش تابع با ضابطهٔ

$x \xmapsto{f} f(x) = x^۴ + x^۲ - ۲$ و $x \in R$ رارسم کنید .

حل- دامنه تعریف تابع: $D_f = R$ و تابع روی R ، پیوسته ومشتق پذیر است .

تابع f زوج است زیرا: $f(-x) = f(x)$ ، $(\forall x \in R)$.

در نتیجه تابع را در فاصله $[\circ$ و $+\infty[$ رسم نموده و قرینه آنـرا نسبت به محورyها می‌کشیم.

جهت تغییرات: مشتق تـابع $x \xmapsto{f'} f'(x) = ۴x^۳ + ۲x = ۲x(۲x^۲ + ۱)$ و بـازای $x = \circ$ تغییرعلامت می‌دهد.

جدول تغییرات:

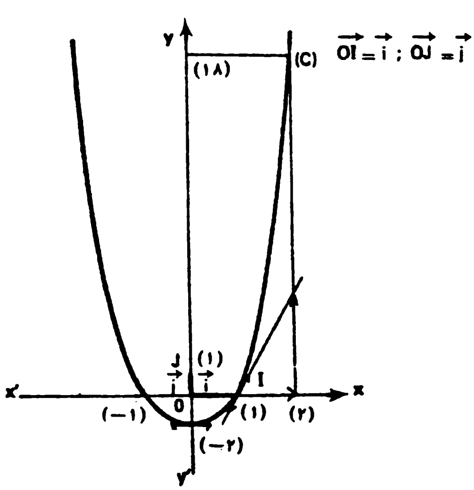
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^۴ = +\infty$$

$$f(\circ) = -۲$$

$$(\forall x \in R) : (f(x) = \circ \Longleftrightarrow x^۴ + x^۲ - ۲ = \circ)$$

$$\begin{cases} x = ۱ \text{ و } f'(۱) = ۶ \\ x = -۱ \end{cases}$$

x	∘		۱		۲		+∞
f'(x)	∘			+			
f(x)	−۲	↗	∘	↗	۱۸	↗	+∞



مثال۴: جهت تغییرات ومنحنی نمایش تابع f باضابطهٔ $x\xmapsto{f} f(x)=x^4-8x^2+7$ و $x\in R$ را رسم کنید.

حل ــ دامنه تعریف تابع: $D_f=R$ است وتابع روی دامنه تعریفش پیوسته و مشتق‌پذیر است.

تابع f زوج است. در نتیجه نمودار تابع را درفاصله $[0 \quad \text{و} \quad +\infty]$ رسم نموده و سپس قرینه آنرا نسبت به محور yها می‌کشیم.

جهت تغییرات: مشتق تابع، $x\xmapsto{f'} f'(x)=4x^3-16x=4x(x^2-4)=0$ بازای سه

مقدار $x=0$ و $x=2$ و $x=-2$ صفر شده تغییر علامت می‌دهد.

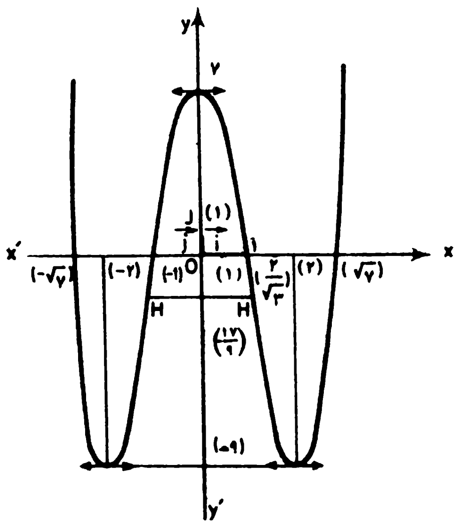
جدول تغییرات تابع:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^4=+\infty$$

$$f(0)=7 \qquad f(2)=-9$$

$$(\forall x\in R) \text{ و } f(x)=0 \iff x^4-8x^2+7=0 \begin{cases} x=1 & f'(1)=-12 \\ x=\sqrt{7} & f'(\sqrt{7})=12\sqrt{7} \\ x=-1 & \\ x=-\sqrt{7} & \end{cases}$$

x	0		1		2		$\sqrt{7}$		3		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$			0			$+$			
$f(x)$	7	↘	0	↘	-9	↗	0	↗	16	↗	$+\infty$



نقاط عطف تابع:

$x\xmapsto{f''} f''(x)=12x^2-16$ و

$H'\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{3}} \\ \frac{-17}{9} \end{pmatrix}$ و $H\begin{pmatrix} \frac{+2}{\sqrt{3}} \\ \frac{-17}{9} \end{pmatrix}$ است.

مثال۵: جهت تغییرات و منحنی نمایش تابع f با ضابطهٔ ،

$$x \xmapsto{f} f(x) = -\frac{۳}{۲}x^{۴} + ۴x^{۳} + ۳x^{۲} - ۱۲x$$ و $x \in R$ را رسم کنید .

حل: دامنه تعریف تابع: $D_f = R$ و تابع روی دامنه تعریفش پیوسته و مشتق پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع ،

$$x \xmapsto{f'} f'(x) = -۶x^{۳} + ۱۲x^{۲} + ۶x - ۱۲$$

$$f'(x) = -۶x(x^{۲} - ۱) + ۱۲(x^{۲} - ۱)$$

$$f'(x) = -۶(x - ۲)(x^{۲} - ۱)$$

بازای سه مقدار ۱ – و ۱ و ۲ صفر شده تغییرعلامت می‌دهد.

جدول تغییرات:

$$\underset{x \to -\infty}{\text{حد}} f(x) = \underset{x \to -\infty}{\text{حد}} \left(-\frac{۳}{۲}x^{۴}\right) = -\infty$$

$$\underset{x \to +\infty}{\text{حد}} f(x) = \underset{x \to +\infty}{\text{حد}} \left(-\frac{۳}{۲}x^{۴}\right) = -\infty$$

$$f(-۱) = \frac{۱۹}{۲} \text{ ،}$$

$$f(۱) = -\frac{۱۳}{۲}$$

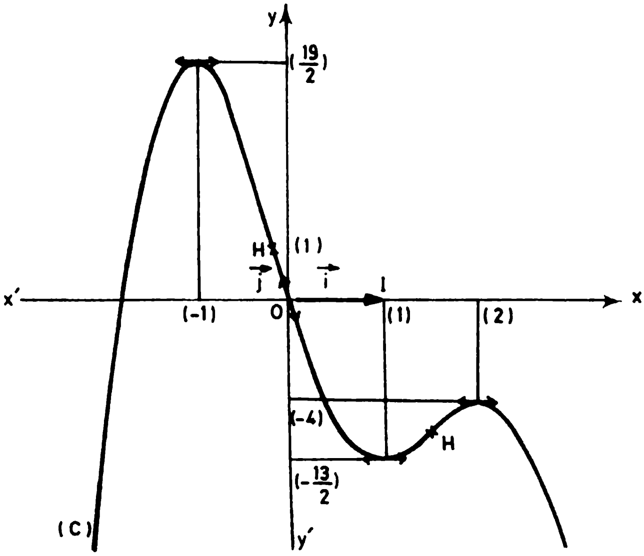
$$f(۲) = -۴$$

$$f(۰) = ۰ \text{ و } f'(۰) = -۱۲$$

$$(\forall x \in R) \text{ و } f(x) = ۰ \Leftrightarrow -\frac{۳}{۲}x^{۴} + ۴x^{۳} + ۳x^{۲} - ۱۲x = ۰$$

x	$-\infty$		-۲		-۱		۱		۲		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		۰	$-$	۰	$+$	۰		$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-۲۰	$\nearrow$	$\frac{۱۹}{۲}$	$\searrow$	$\frac{-۱۳}{۲}$	$\nearrow$	-۴	$\searrow$	$-\infty$

مجانب: نمودار تابع مجانب مایل ندارد و شاخه بینهایت آن مانند سهمی در امتداد yy' است.



نقاط عطف عبارتند از:

$$x \xrightarrow{f''} f''(x) = ۶(-۳x^۲ + ۴x + ۱)$$

$$(\forall x \in R) \text{ و } [f''(x) = ۰ \iff (x = \frac{۲ + \sqrt{۷}}{۳} \text{ و } x = \frac{۲ - \sqrt{۷}}{۳})]$$

تمرین:

جهت تغییرات و نمودار هندسی هریك ازتوابع زیررا رسم کنید.

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = -۲x^۳ + ۶x - ۱$$

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{۱}{۶}x^۳ - ۲x - ۱$$

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \frac{۱}{۴}x^۴ - \frac{۱}{۲}x^۲ - ۱$$

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = -x^۴ - ۳x^۲ + ۱۰$$

$$x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = x^۴ - ۲x^۳ - ۲x^۲ + ۳$$

نمودار تابع‌هموگرافیک $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\quad (\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$ و $c\neq 0)$

مثال- جهت تغییرات ومنحنی تابع f با ضابطهٔ $x\xrightarrow{f}f(x)=\dfrac{-x-1}{2x-1}$ را رسم کنید.

حل- دامنه‌تعریف: $D_f=R-\{\frac{1}{2}\}$، تابع روی $]\frac{1}{2}, +\infty[$ و $]-\infty, \frac{1}{2}[$ پیوسته ومشتق‌پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع، $x\xrightarrow{f'}f'(x)=\dfrac{3}{(2x-1)^2}$ همواره مثبت است

جدول تغییرات:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$

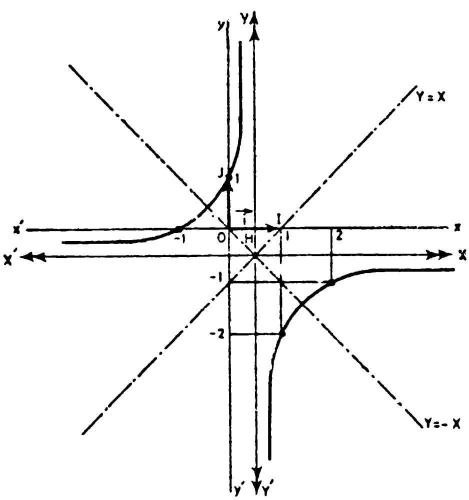
$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=+\infty$

$f'(0)=3$ و $f(0)=1$

$(\forall x\in D_f)$ و $f(x)=0\Leftrightarrow -x-1=0$ ، $x=-1$

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+			‖	+		
$f(x)$	$-\frac{1}{2}\nearrow$	$0\nearrow$	$1\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty\nearrow$	$-2\nearrow$	$-1\nearrow$	$-\frac{1}{2}$

تابع دارای دو مجانب به معادلات $y=-\frac{1}{2}$ و $x=\frac{1}{2}$ است.



نکته: نمودار هندسی تابع f با ضابطهٔ

$x\in R-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ و $x\xrightarrow{f}f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

یك هذلولی است که نقطهٔ H محل تلاقی مجانبهای آن مرکز تقارن و خطوط به معادلات

$y=-x+\dfrac{a-d}{c}$ و $y=x+\dfrac{a+d}{c}$

محورهای تقارن آن هستند.

نمودار تابع: $y=\dfrac{ax^{۲}+bx+c}{b'x+c'}$ ، $a\neq ۰$ و $b'\neq ۰$

مثال ۱- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی (C) نمایش تابع باضابطهٔ $y=\dfrac{x^{۲}-۳x}{x-۴}$

دامنه تعریف تابع: $D_f=R-\{۴\}$ است.

پس تابع به‌ازای همه مقادیر x به استثنای $x=۴$ معین، پیوسته و مشتق پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع $y'=\dfrac{x^{۲}-۸x+۱۲}{(x-۴)^{۲}}$ در ازای دو مقدار $x=۲$ و $x=۶$ صفر شده تغییر علامت می‌دهد، پس‌تابع یك ماکزیمم ویك می‌نیمم دارد.

جدول تغییرات: در ازای $x=۰$ داریم $y=۰$ و درازای $y=۰$ داریم $x=۰$ یا $x=۳$ هرگاه $x\to\pm\infty$ داریم $y\to\pm\infty$.

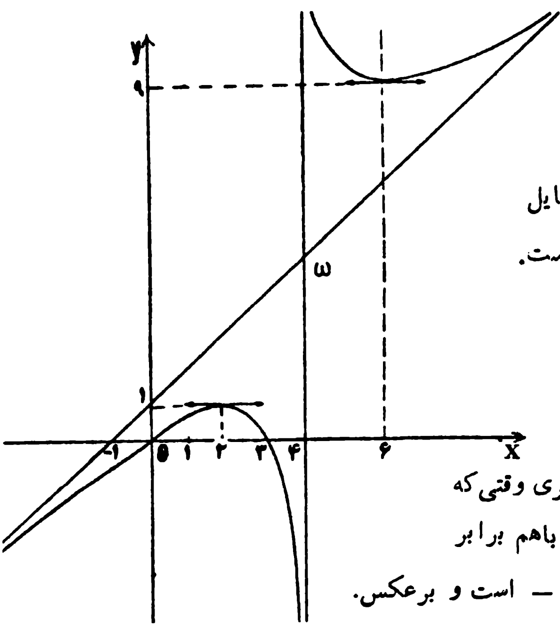
$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۴^+} f(x)=+\infty$$

x	$-\infty$		۰		۲		۳		۴		۶		$+\infty$
y'			+		۰		−		‖	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۱	↘	۰	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	۹	↗	$+\infty$

مجانب: منحنی نمایش تابع دارای مجانب قائم $x=۴$ است. برای تعیین مجانب مایل، تابع را چنین می‌نویسیم:

$$y=x+۱+\frac{۴}{x-۴}$$

پس خط به معادله $y=x+۱$ مجانب مایل منحنی است. شکل منحنی به‌شرح زیر است.



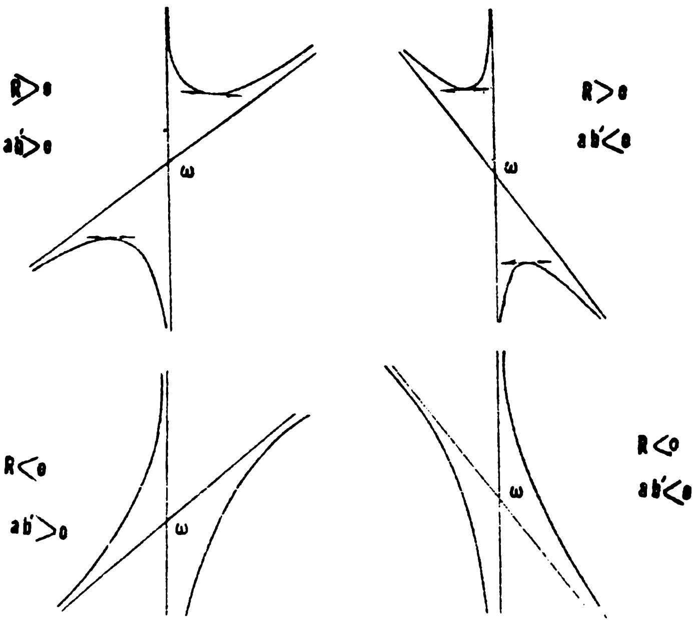
نکته: حد چپ و راست توابع کسری وقتی‌که x به‌سمت ریشه سادهٔ مخرج میل می‌کند باهم برابر نیستند اگریکی $+\infty$ باشد دیگری $-\infty$ است و برعکس.

تبصره ۱: در تابع $y=\dfrac{ax^{2}+bx+c}{b'x+c'}$ ، $b'\neq 0$ و a

اگر R مبین سه جمله‌ای صورت مشتق تابع اصلی، یعنی مبین سه جمله‌ای صورت کسر:

$$y'=\frac{ab'x^{2}+2ac'x+(bc'-cb')}{(b'x+c')^{2}}$$

مثبت باشد تابع دارای یك ماکزیمم و می‌نیموم است و اگر $R<0$ باشد تابع ماکزیمم و می‌نیموم ندارد منحنی همواره نسبت به نقطهٔ ω محل برخورد مجانبها متقارن است و نمودار منحنی به‌صورت یکی از اشکال چهارگانهٔ زیر است

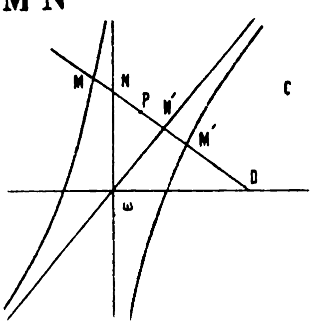


تبصره ۲ـ اگر خط غیر مشخص D منحنی (C) نمایش هندسی تابع با ضابطهٔ

$$y=\frac{ax^{2}+bx+c}{b'x+c'}$$

را در دو نقطه M و M' و مجانبهای آن را در نقطه‌های N و N' قطع کند، همواره:

$MN=M'N'$



برهان: کافی است ثابت کنیم که وسط 'MM بر وسط 'NN منطبق است.

تمرین

مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش هریک از تابعهای زیر:

$$1)\quad y=\frac{x^2-4x+3}{3x-1} \qquad\qquad 2)\quad y=x+1+\frac{4}{x+1}$$

$$3)\quad y=x-1-\frac{4}{x-1} \qquad\qquad 4)\quad y=|x-2|+\frac{4}{x-2}$$

نمودار تابع $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ و $a'\neq 0$ و $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$

مثال ۱- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی (C) نمایش تابع باضابطهٔ $y=\dfrac{2x^2-3x}{x^2+x+3}$

حل- دامنه تعریف: $D_f=R$ است زیرا مخرج کسر ریشه ندارد.

پس تابع همواره معین و پیوسته ومشتق پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع:

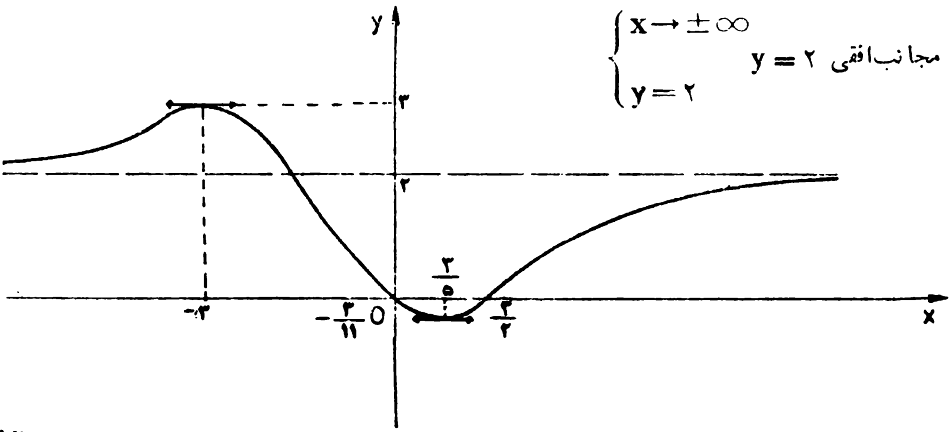
$$y'=\frac{5x^2+12x-9}{V^2} \qquad y'=0 \implies \begin{cases} x=-3 \text{ یا } x=\dfrac{3}{5} \\ y=3 \text{ و } y=-\dfrac{3}{11}\end{cases}$$

بازای دو مقدار $x=-3$ و $x=\dfrac{3}{5}$ صفر شده تغییر علامت می‌دهد.

x	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−			0	+			
y	2	↗	3	↘	0	↘	$-\frac{3}{11}$	↗	0	↗	2

$$\begin{cases} x=0 \text{ یا } x=\dfrac{3}{2} \\ y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x\to\pm\infty \\ y=2\end{cases} \quad \text{مجانب افقی } y=2$$



مثال ۲- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی (C) نمایش تابع باضابطهٔ

$$y=\frac{x^{۲}-۴x-۵}{x^{۲}-۴x+۵}$$

حل- دامنه‌تعریف: $D_f=R$ است‌زیرا مخرج کسر ریشه ندارد پس تابع دردامنه‌تعریفش پیوسته ومشتق‌پذیر است.

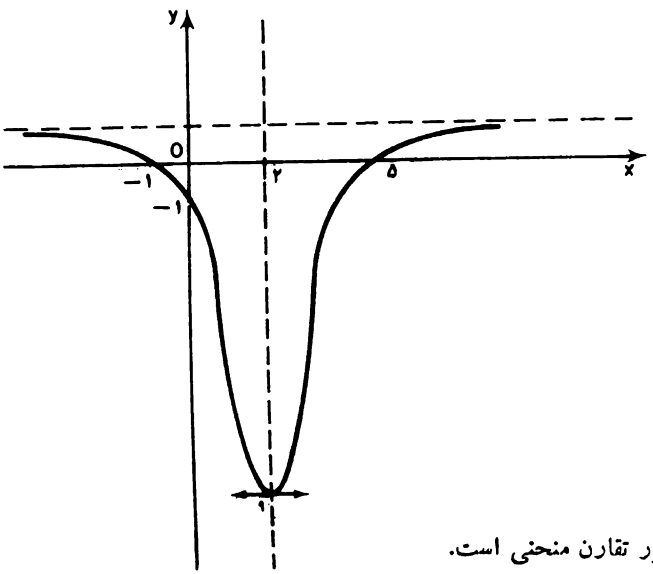
جهت تغییرات: مشتق تابع $y'=\frac{۲۰x-۴۰}{v^{۲}}$ بازای $x=۲$ صفر شده تغییر علامت می‌دهد. و $y'=۰\begin{cases}x=۲\\ y=-۹\end{cases}$

جدول تغییرات: $\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y=۱\end{cases}$ $\begin{cases}x=-۱ \text{ و } ۵\\ y=۰\end{cases}$ $\begin{cases}x=۰\\ y=-۱\end{cases}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=۱$$

x	$-\infty$		-۱		۰		۲		۵		$+\infty$
y'			—				۰		+		
y	۱	↘	۰	↘	-۱	↘	-۹	↗	۰	↗	۱

مجانب: خط $y=۱$ مجانب افقی است.



خط $x=۲$ محور تقارن منحنی است.

مثال ۳ــ تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی (C) نمایش تابع باضابطهٔ $y=\dfrac{x^2-4x}{x^2-2x+1}$

حل ــ دامنهٔ تعریف: $D_f=R-\{1\}$ زیرا مخرج ریشه مضاعف $x'=x''=1$ دارد.
پس تابع روی فاصلهٔ $]-\infty\ ,1[$ و $]1\ ,+\infty[$ پیوسته ومشتق پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع $y'=\dfrac{2x^2+2x-4}{(x-1)^4}=\dfrac{2(x-1)(x+2)}{(x-1)^4}$

بازای دو مقدار $x=1$ و $x=-2$ تغییر علامت می‌دهد.

جدول تغییرات: $y'=\dfrac{2(x+2)}{(x-1)^3}$ ، $y'=0\begin{cases}x=-2\\ y=\dfrac{4}{3}\end{cases}$

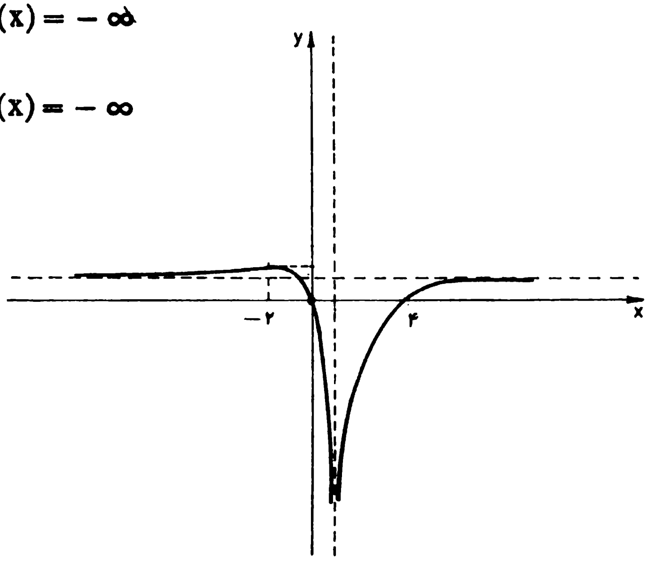
تابع درازای $x=1$ مشتق‌پذیر نیست و فقط یك ماکزیمم دارد.

$\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y=1\end{cases}$ ، $\begin{cases}x\to 1^+\\ y\to-\infty\end{cases}$ ، $\begin{cases}x=0\ \text{و}\ 4\\ y=0\end{cases}$ $\begin{cases}x\to 1^-\\ y\to-\infty\end{cases}$

x	$-\infty$		-2		0		1		4		$+\infty$
y'		+	0	−		−	||	+		+	
y	1	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	0	↗	1

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ حد

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$ حد



مثال۴ـ نمودار تابع f باضابطهٔ $x \overset{f}{\longmapsto} f(x)=\dfrac{x^{2}-2x-3}{x^{2}-2x+1}$ را رسم کنید.

حل ـ دامنه تعریف: $D_f = R - \{1\}$ زیرا مخرج ریشه مضاعف $x' = x'' = 1$ دارد.

پس تابع روی $]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$ پیوسته ومشتق پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع بازای $x = 1$ تغییرعلامت می‌دهد. ولی تابع‌در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست.

جدول تغییرات :
$$y' = \frac{8}{(x-1)^{3}}$$

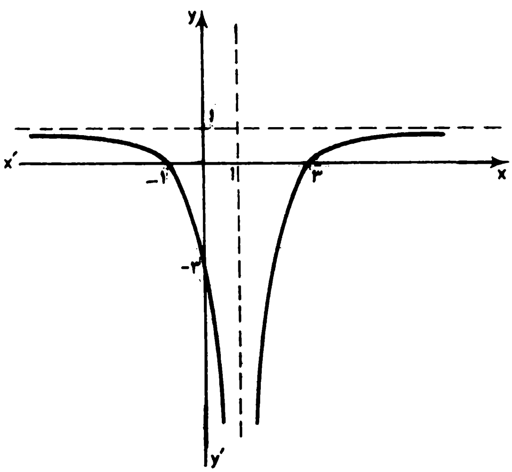
$$\begin{cases} x \to 1 \\ y \to -\infty \end{cases},\quad \begin{cases} x \to \pm\infty \\ y = 1 \end{cases},\quad \begin{cases} x = -1 \text{ یا } 3 \\ y = 0 \end{cases},\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		3		$+\infty$
y'			$-$			||			$+$		
y	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^{+}} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^{-}} f(x) = -\infty$$



خط $x = 1$ محور تقارن نمودار تابع است.

نکته: حد چپ وراست تابع کسری وقتی‌که x به سمت ریشه مضاعف مخرج میـل می کند متحدالعلامه‌اند یعنی یا هردو $+\infty$ یا هردو $-\infty$ هستند.

مثال۵- نمودار هندسی تـابع $x \xmapsto{f} f(x) = \dfrac{x}{۲x^۲ - ۵x + ۲}$ و $x \in R$ را رسم کنید.

حل: دامنه تعریف: تابع در نقاط به طولهای $x = ۲$ و $x = \dfrac{۱}{۲}$ منفصل است.

ودامنه تعریف تابع عبارت است از:

$$D_f =]-\infty \text{ و } \tfrac{۱}{۲}[\cup]\tfrac{۱}{۲} \text{ و } ۲[\cup]۲ \text{ و } +\infty[$$

جهت تغییرات: مشتق تابع $f'(x) = \dfrac{۲x^۲ - ۵x + ۲ - x(۴x - ۵)}{(۲x^۲ - ۵x + ۲)^۲} = \dfrac{-۲(x^۲ - ۱)}{(۲x^۲ - ۵x + ۲)^۲}$

بازای $x = ۱$ و $x = -۱$ صفر شده تغییر علامت می‌دهد.

$x = -۱$ و $f(-۱) = -\dfrac{۱}{۹}$

$x = ۱$ و $f(۱) = -۱$

مجانبها:
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{۲x^۲} = \lim_{x \to \infty} \frac{۱}{۲x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = ۰^- \quad ، \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = ۰^+$$

جدول تغییرات:

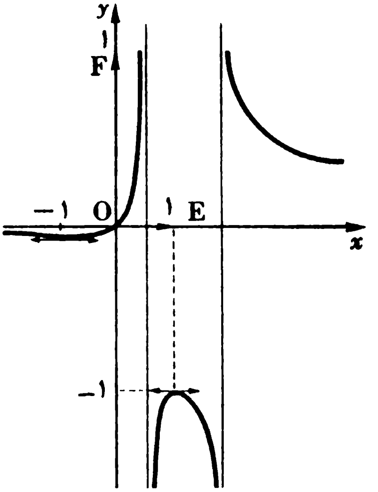
x	$-\infty$		-۱		۰		$\frac{۱}{۲}$		۱		۲		$-\infty$
y'		−	۰	+			‖	+	۰	−	‖	−	
y	۰	↘	$-\frac{۱}{۹}$	↗	۰	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-۱	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	۰

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۲}^-} f(x) = \frac{\frac{۱}{۲}}{۰^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۲}^+} f(x) = -\infty$$



مثال۶ـ جهت تغییرات ومنحنی تابع f با ضابطهٔ $x \xrightarrow{f} f(x) = \dfrac{x^2 + 2|x|}{x^2 + 6x + 5}$ را رسم کنید.

به ازاء $x \geqslant 0$ داریم $|x| = x$ و به ازاء $x < 0$ داریم $|x| = -x$

پس باید تغییرات دو تابع زیر را بررسی کرد:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 + 6x + 5} \\ x \geqslant 0 \end{cases} , \quad \begin{cases} y_2 = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 + 6x + 5} \\ x < 0 \end{cases}$$

تابع y_1 همواره پیوسته است و مشتق آن مثبت است.

$$y' = \frac{4x^2 + 10x + 10}{V^2} > 0 \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \to +\infty \\ y = 1 \end{cases}$$

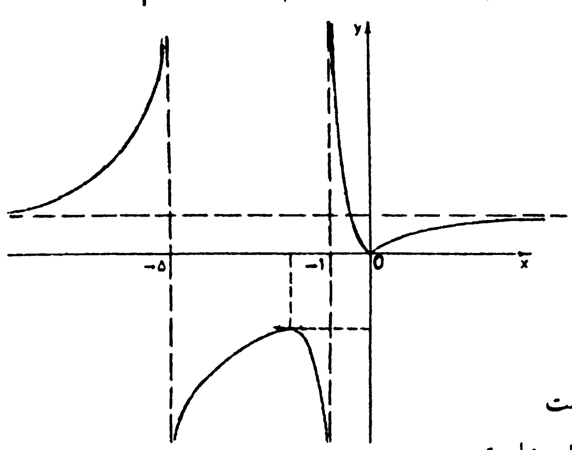
تابع y_2 در ازاء $x = -1$ و $x = -5$ نامعین و در ازای سایر مقادیر x معین و پیوسته است:

$$y_2' = \frac{8x^2 + 10x - 10}{V^2} = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 - \sqrt{105}}{8}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \to -1 \text{ و } -5 \\ y_2 \to \pm\infty \end{cases} \quad \begin{cases} x \to -\infty \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

تغییرات دو تابع رادر یك جدول خلاصه می‌کنیم:

x	$-\infty$	-5	$\frac{-5-\sqrt{105}}{8}$	-1	0	$+\infty$
y'	$+$	$+$	0 $-$	$-$	$+$	
y	$1 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -\frac{8}{3}$	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow 0$	$0 \nearrow$	1



تابع درازای $x = 0$ می‌نیمم است

امامشتق آن در ازاء $x = 0$ نامعین‌است.

۵ ـ ۲ ـ بعضی از خواص تابع : $y=\dfrac{ax^{2}+bx+c}{a'x^{2}+b'x+c'}$ (درحالتی که لااقل a یا a' مخالف صفر باشد).

۱ـ هرگاه تابع فوق دارای یك ماکزیمم و یك می‌نیموم باشد و منحنی (c) نمایش تابع را با خط دلخواهی موازی محورxها قطع کنیم تا منحنی‌را در دو نقطه M و N قطع کند. تصاویر M و N و تصاویر نقاط C و D ،ماکزیمم و می‌نیموم تابع ، روی محورxها تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند.

۲ـ هرگاه منحنی(C) را با خط $y=m$ موازی محورxها قطع کنیم همواره بین x' و x'' طول نقاط برخورد خط و منحنی رابطهٔ مستقلی از m برقرار است.

تعیین عرضهای ماکزیمم ومی‌نیموم تابع بدون استفاده از مشتق

هرگاه خط Δ موازی محورxهاو به معادلهٔ $y=m$ باشد از حل دستگاه دو معادلهٔ:

خواهیم داشت :
$$\begin{cases} y=\dfrac{ax^{2}+bx+c}{a'x^{2}+b'x+c'} \\ y=m \end{cases}$$

$$(ma'-a)x^{2}+(mb'-b)x+(mc'-c)=0 \quad (I)$$

معادلهٔ (I) طول‌های نقاط برخوردخط $y=m$ ومنحنی (C) می‌باشد حال هرگاه Δ_1 مبین این معادلـه مثبت باشد معادله دوجواب ودر نتیجه خط منحنی را در دونقطهٔ متمایز قطع می‌کند.

هرگاه Δ_1 مبین معادله را صفر قراردهیم،معادله(I) دارای‌ریشهٔ مضاعف بوده وخط برمنحنی مماس است. یعنی ریشه‌های معادله $\Delta_1\equiv(mb'-b)^{2}-4(ma'-a)(mc'-c)=0 \quad (II)$ **که برحسب m از درجهٔ دوم است عرض‌های نقاط ماکزیمم ومی‌نیموم می‌باشند. البته بایدتوجه داشت که این ریشه ضریب x^{2} را در معادلهٔ (I) صفر نکند، زیرا درآن حالت معادله (I) به یك معادلهٔ درجهٔ یك تبدیل می‌شود و مبین معنی ندارد.**

طولهای نقطه‌های ماکزیمم ومی‌نیموم عبارتست از: $x=\dfrac{-(mb'-b)}{2(ma'-a)}$ ریشهٔ‌مضاعف معادلهٔ(I)که درآن به‌جای m بـه‌ترتیب مقادیر y_1 و y_2 ریشه‌های معادلهٔ(II) را قرار می‌دهیم.

تبصره- درموقع محاسبهٔ عرض ماکزیمم و می‌نیموم تـابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ می‌توان‌ریشه‌های مشتق را به‌جای اینکه درکسر $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ قراردهیم‌درکسر $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (بەشرط اینکه $f'(x)$و $g'(x)$ به ازای آن‌مقدار صفر نباشد) قرار داد زیرا :

$$y'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^{2}}$$

طول ماکزیمم و می‌نیموم ریشه‌های صورت مشتق است یعنی: $f'(x)\cdot g(x)=g'(x)\cdot f(x)$

چون $g(x)$ و $g'(x)$ صفر نیست طرفین را بر $g(x)\cdot g'(x)$ تقسیم می‌کنیم تا نتیجه شود:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال

جهت تغییرات ومنحنی تابع $x \xrightarrow{f} f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ و $x\in R$ را رسم کنید.

دامنه‌تعریف: $D_f=R-\{1\}$ وتابع در $]-\infty, 1[$ و $]1, +\infty[$ پیوسته ومشتق‌پذیر است.

جهت تغییرات: تابع درنقطه یك مشتق‌پذیر نیست و مشتق تابع بازای $x=0$ ، صفر شده ولی تغییرعلامت نمی‌دهد.و بازای $x=3$ تغییرعلامت می‌دهد.

$$x \xrightarrow{f'} f'(x)=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

جدول تغییرات:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1} |f(x)|=+\infty$$

$$f(0)=0 \qquad f(3)=\frac{27}{4}$$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow$	$\frac{27}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

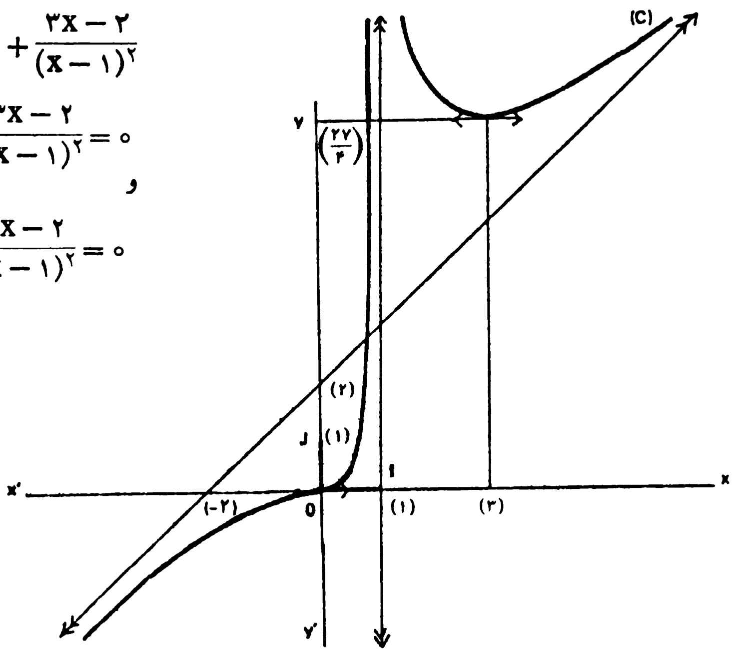
مجانبها: خط $x=1$ مجانب قائم و خط $y=x+2$ مجانب مایل آن است زیرا:

$$f(x)=x+2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{(x-1)^2}=0$$

و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{(x-1)^2}=0$$



تمرین:

جهت تغییرات و نمودار هندسی هریك ازتوابع زیررا رسم کنید.

۱) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$

۲) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+x+1}$

۳) $y=\dfrac{x^2-1}{5x^2-4x}$

۴) $y=\dfrac{x^2-1}{(x-2)^2}$

۵) $y=\dfrac{2x^2+1}{x^2+2x}$

۶) $y=\dfrac{2x^2+8x+7}{x^2+4x+3}$

۷) $y=\dfrac{(x+1)^2}{3x(x-1)}$

۸) $y=\dfrac{4x^2-3x+2}{3(x^2-1)}$

۹) $y=\dfrac{3(x-1)^2}{2x(x-3)}$

۱۰) $y=\dfrac{x^2-2x}{x^2-2x-3}$

۱۱) $y=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4}$

۱۲) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x-3}$

۱۳) $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}$

۱۴) $y=\dfrac{-6x+6}{x^2+3}$

۱۵) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2-2}$

۱۶) $y=\dfrac{x^2+2|x-1|+5}{x^2-2x-3}$

۱۷) $y=\dfrac{|x^2-4x|}{x^2-4x+3}$

۱۸) $y=\dfrac{3x^2-1}{x^3}$

۱۹) $y=\dfrac{x^3-3x-2}{x^3}$

۲۰) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$

۲۱) $y=\dfrac{x^3+3x+1}{x^2}$

۲۲) $y=\dfrac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}$

۲۳ـ تابع باضابطه $y=\dfrac{x^2-2ax+1}{x^2-2bx+1}$ که درآن $a\neq b$ است مفروض است:

الف ـ چه رابطه ای بین a و b برقرار باشد تا $M+m=0$ (M ماکزیمم و m می‌نیموم تابع است).

ب ـ به فرض $a=5$ و $M+m=0$ جدول تغییرات تابع را پس از تعیین پارامترها تعیین ومنحنی آنرا رسم کنید.

۲۴- اگر A و B تصاویر نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع $y=\frac{(x-1)^2}{x^2-2}$ روی محورxها و C و D تصاویر نقاط تلاقی خط $y=m$ با منحنی تابع فوق روی محورxها بـاشند، نشان دهیدکه چهار نقطهٔ D و C و B و A روی محور xها تشکیل یك تقسیم توافقی می‌دهند.

۲۵- تابع $y=\frac{x}{x^2-5x+4}$ مفروض است.

الف- منحنی نمایش آنرا رسم کنید.

ب- اگر A و B دونقطه از منحنی باشندکه مماس در آنها موازی محورxها باشد و A و Bرا بهم بپیوندیم تا خط‌حاصل منحنی‌را درنقطهٔ دیگری مانند C قطع کند، مطلوبست‌مختصات نقطهٔ C.

ج- معادلهٔ مماس در C را بنویسید. اگـر خط اخیر منحنی را در D قطع کند مختصات نقطه D را نیز بنویسید.

۲۶- اولاً مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی (C) نمایش تابع:

$$y=\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}$$

ثانیاً اگر L نقطه برخورد منحنی (C) بامجانب آن باشد معادلهٔ خطوطی راکه با ضریب زاویه‌ای m می‌باشند و از L گذشته‌اند بنویسید هرگاه M_1وM_2 دو نقطهٔ دیگر برخورد خط مذکور بامنحنی (C) باشند حدود پارامتر m را چنان تعیین‌کنیدکه دو نقطه برخورد دیگروجود داشته بـاشد. در حالت مخصوص‌که M_1 بـر M_2 منطبق است مقادیر m را تعیین و مواضع M_1 یا M_2 را مشخص کنید.

۲۷- در تابع $y=\frac{x^2+ax+10}{x+b}$ مقادیر a و b را چنان‌تعیین‌کنیدکه $\omega(1,0)$ مرکز تقارن منحنی نمایش تابع باشد. پس از تعیین a و b منحنی را رسم‌کنید.

۲۸- تابع $x\xrightarrow{f}f(x)=\frac{x^2+3x+4m}{x^2+(5m+1)x+3}$ و $x\in R$ مفروض است

اولا: ثابت کنید

بازاء مقادیر مختلف m دسته منحنی‌های (C_m) نمودارتابع‌فوق ازسه‌نقطه ثابت‌که مختصات‌آنها را تعیین خواهید نمود می‌گذرند.

ثانیاً: m را چنان معین‌کنیدکه نقطه تلاقی منحنی (C) باخط مجانب افقی نقطه‌ای به‌طول $\frac{3}{2}$ باشد.

۲۹- اولاً تغییرات تابع $y=\dfrac{x^۲-۴x+۴}{x^۲-۱}$ را تعیین و منحنی T نمایش آنرا رسم کنید.

ثانیاً - اگر خط $y=\lambda$ موازی محور xهــا منحنیT را در M و M' قطع کند مختصات P وسط MM' را برحسب پارامتر λ بنویسید معادلهٔ E مکان هندسی نقاط P را نیز تعیین کنید و منحنی E را درهمان دستگاه مختصات رسم کنید.

۳۰- تابع $y=\dfrac{۲x(x-m)}{x^۲+x-۶}$ مفروض است.

۱) حدود m راچنان تعیین کنید که تابع فوق دارای ماکزیمم ومی‌نیمم باشد.

۲) به ازاء $m=۰$ منحنی T نمایش تابع را رسم کنید.

۳) هرخط غیر مشخص D که ازمبدأ مختصات بگذرد منحنی T را معمولاً در دو نقطهٔ دیگـر M و M' قطع می کند. اگرP وسط قطعهٔ خط MM' باشد نشان دهید که مجموعهE متشکل از نقاط P قسمتی از نمودار تابع $y=\dfrac{۲x}{۱+۲x}$ می‌باشد . منحنی E را در همان دستگاه مختصات رسم کنید.

۳۱- تابع $y=\dfrac{x^۲+ax+b}{x^۲+۲}$ مفروض است ثابت کنیدبازاء همهٔ مقادیر a وb $(a\neq ۰)$ این تابع دارای‌یك ماکزیمم ویك‌می‌نیمم‌است. a و b راچنان معین کنید که مجموع طولهای نقاط ماکزیمم‌و می‌نیمم برابر(۱ -) وحاصلضرب‌عرضهای‌نقاط ماکزیمم و می‌نیمم‌برابر (۲ -) باشد. سپس منحنی (C) نمایش تابع $y=\dfrac{x^۲-۴x}{x^۲+۲}$ را رسم‌کنید. اگر خط $y=m$ منحنی (C) را در دو نقطه A و B وخط $x=-\dfrac{۱}{۲}$ را در نقطه P قطع کند ثابت‌کنید که بازاء همهٔ مقادیرm حاصلضرب $PA\times PB$ مقدار ثابتی است.

۳۲- تابع $y=\dfrac{x^۳+a}{(b+۱)x^۲-b}$ مفروض‌است. aوb را چنان معین‌کنیدکه نقطه $M(۲و۳)$ نقطه می‌نیمم منحنی‌تابع فوق باشد.سپس جدول ومنحنی (C) نمایش تغییرات تابع، $y=\dfrac{x^۳+۴}{x^۲}$ را رسم‌کنید.

۳۳- تابع $y=\dfrac{x^۲+۴}{۲ax+۳}$ مفروض‌است a راچنان‌معین کنید که‌تفاضل عرضهای‌نقاط‌ماکزیمم و می‌نیمم تابع برابر (۵) باشد.

۵–۳ تعریف – تابع $y=f(x)$ را گنگ گویم درصورتی که عبارت $f(x)$ نسبت به x گنگ باشد .

تابعهای

$$y=x-2\sqrt{x-1}$$

$$y=x+\sqrt{2-x^2}$$

$$y=x-1+\sqrt{x^2-2x+2}$$

$$y=2x-\sqrt{x^2-1}$$

$$y=\sqrt{x}+\sqrt{4-2x}$$

$y=\sqrt[3]{x^2-3x}$ گنگ هستند

توجه: هروقت یك معادلهٔ اصم‌حل کردید جوابهای بدست‌آمده را امتحان کنید زیرا ممکن است جواب خارجی وارد معادله شده باشد .

مثال۱- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع :

$$y=3-\sqrt{-x^2+4}$$

دامنه تعریف تابع: $D_f=\{x \mid -x^2+4\geqslant 0\}$ یا $D_f=[-2 , 2]$ است تابع در دامنهٔ تعریفش پیوسته و روی $]-2 , 2[$ مشتق‌پذیر است.

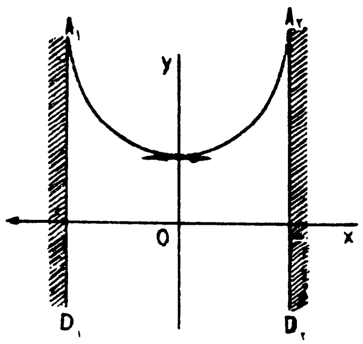
جهت تغییرات: مشتق تابع

$$y'=\frac{2x}{2\sqrt{-x^2+4}}\ ,\ y'=0:\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-2\\ y=3\end{cases}\ \text{و}\ \begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$$

بازای $x=0$، صفر شده تغییرعلامت می‌دهد.

x	-2		0		2
y'	∞	$-$	0	$+$	∞
y	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3



معادلهٔ $y=0$ ریشه ندارد.

نمودار فوق نیمدایره است که‌در A_1 و A_2 بر D_1 و D_2 مماس است. و A_1 و A_2را نقاط توقف منحنی می گویند.

مثال۲- جهت تغییرات ومنحنی تابع f با ضابطهٔ $x \xrightarrow{f} f(x) = x - ۲ + \sqrt{-x^۲ + ۴x}$ را رسم کنید.

دامنه تعریف تابع: $D_f = \{x | x \in R, -x^۲ + ۴x \geqslant ۰\}$ یا $D_f = [۰ و ۴]$ و درفاصله $]۰ و ۴[$ مشتق‌پذیر است.

تابع به‌ازای مقادیر فاصلهٔ $[۰, ۴]$ معین و پیوسته است.

جهت تغییرات: مشتق تابع پس ازساده‌کردن می‌شود:

$$y' = \frac{-x + ۲ + \sqrt{-x^۲ + ۴x}}{\sqrt{-x^۲ + ۴x}}$$

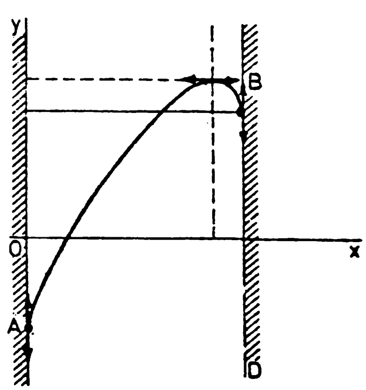
معادلهٔ $y' = ۰$ یعنی $-x + ۲ + \sqrt{-x^۲ + ۴x} = ۰$ دوریشهٔ $۲ + \sqrt{۲}$ و $۲ - \sqrt{۲}$ دارد که درآن $\sqrt{۲} - ۲$ ریشهٔ خارجی است و ریشهٔ مشتق تنها عدد $۲ + \sqrt{۲}$ است.

از معادلهٔ $y = ۰$ برای x دوعدد $۲ + \sqrt{۲}$ و $۲ - \sqrt{۲}$ بدست می‌آید که‌درآن $۲ + \sqrt{۲}$ خارجی و ریشهٔ واقعی معادله $۲ - \sqrt{۲}$ است. بنابراین داریم:

$$y' = ۰ : \begin{cases} x = ۲ + \sqrt{۲} \\ y = ۲\sqrt{۲} \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۰ \\ y = -۲ \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۴ \\ y = ۲ \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۲ - \sqrt{۲} \\ y = ۰ \end{cases}$$

برای تعیین علامت مشتق درهرفاصله عددی راکه ریشهٔ مشتق نباشد در مشتق قراردهید تاعلامت مشتق به ازای آن معلوم شود.

x	۰		$۲ - \sqrt{۲}$		$۲ + \sqrt{۲}$		۴
y′	∞		+		۰	−	∞
y	−۲	↗	۰	↗	$۲\sqrt{۲}$	↘	۲



منحنی نیم بیضی است وبرمحور yها وبر خط D مماس است.

نقاط A و B را نقاط توقف منحنی می‌گویند.

مثال۳ـ جهت تغییرات ومنحنی تابع f با ضابطهٔ $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = x - ۲ - \sqrt{x-۴}$ را رسم کنید.

دامنه تعریف تابع: $D_f = \{x | x \in R, x - ۴ \geqslant ۰\}$ یا $D_f = [۴ \quad +\infty[$ و

تابع به‌ازای $x \geqslant ۴$ معین و پیوسته است ودر فاصله $]۴ \quad +\infty[$ و مشتق‌پذیر است.

جهت تغییرات‌تابع: مشتق تابع بازای $x = \frac{۱۷}{۴}$، صفر شده تغییرعلامت می‌دهد.

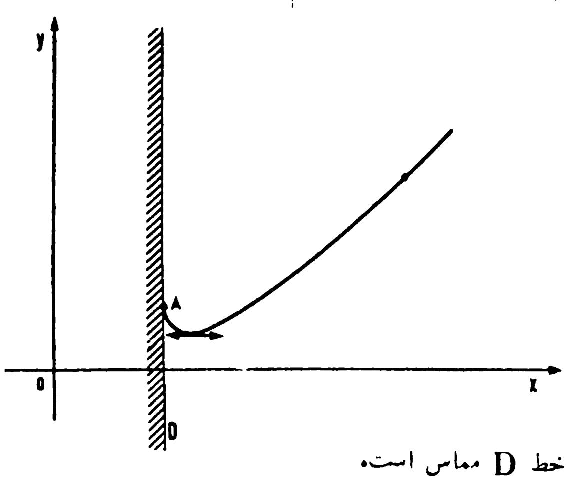
$$y' = ۱ - \frac{۱}{۲\sqrt{x-۴}} = \frac{۲\sqrt{x-۴} - ۱}{۲\sqrt{x-۴}} \qquad y' = ۰ : \begin{cases} x = \frac{۱۷}{۴} \\ y = \frac{۷}{۴} \end{cases}$$

این معادله ریشه ندارد پس منحنی محور xها را قطع نمی‌کند. $x - ۲ - \sqrt{x-۴} = ۰$

$$x^۲ - ۵x + ۸ = ۰$$

$$\begin{cases} x = ۴ \\ y = ۲ \end{cases} \qquad \begin{cases} x \to +\infty \\ y \to +\infty \end{cases}$$

x	۴		$\frac{۱۷}{۴}$		∞
y'	∞	$-$	۰	$+$	
y	۲	↘	$\frac{۷}{۴}$	↗	$+\infty$



منحنی در A بر خط D مماس است.

مجانب:
$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x - ۲ - \sqrt{x-۴}}{x} = ۱$$

$$h = \lim_{x \to +\infty} (y - mx) = \lim_{x \to +\infty} (x - ۲ - \sqrt{x-۴} - x) = -\infty$$

نمودار مجانب مایل نداردولی دارای راستای مجانب به‌معادله $y = x$ خواهد بودونقطه A رانقطه توقف میگویند.

مثال ۴- جدول تغییرات ومنحنی تابع زیررا رسم کنید.

$$x \in R \text{ و } x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = ۵x + ۳\sqrt{x^۲ - ۱}$$

دامنهٔ تعریف: $D_f = (]-\infty \text{ و } -۱] \cup [۱ \text{ و } +\infty[)$

تابع روی $]\infty+ \text{ و } ۱]$ و $[۱- \text{ و } \infty-[$ معین و پیوسته و روی $]\infty+ \text{ و } ۱[$ و $]۱- \text{ و } \infty-[$ مشتق پذیراست.

جهت تغییرات: مشتق تابع $x \overset{f'}{\longmapsto} f'(x) = ۵ + \dfrac{۳x}{\sqrt{x^۲ - ۱}}$ است وعلامت مشتق اگر $x > ۱$ باشد داریم $f'(x) > ۰$ واگر $x < -۱$ باشد داریم:

$$۵ - \frac{۳x}{\sqrt{x^۲ - ۱}} > ۰$$

$$f'(x) \times \left(۵ - \frac{۳x}{\sqrt{x^۲ - ۱}}\right) = \frac{۱۶x^۲ - ۲۵}{x^۲ - ۱}$$

بنابراین علامت مشتق بستگی به‌علامت کسر طرف دوم دارد ومشتق‌بازای $x = -\frac{۵}{۴}$ صفر شده تغییرعلامت‌می‌دهد.

جدول تغییرات:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[x\left(۵ - ۳\sqrt{۱ - \frac{۱}{x^۲}}\right)\right] = -\infty$$

$$f(-۱) = -۵ \text{ ، } \lim_{x \to -۱^-} f'(x) = -\infty$$

$$f(۱) = ۵ \text{ ، } \lim_{x \to ۱^+} f'(x) = +\infty$$

$$f\left(-\frac{۵}{۴}\right) = -۴$$

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۴}$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	۰	$-$	$-\infty$		$+\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-۴	$\searrow$	-۵		۵	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(5+\frac{3|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(5-3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=2 \quad \text{و} \quad (x<0)$$

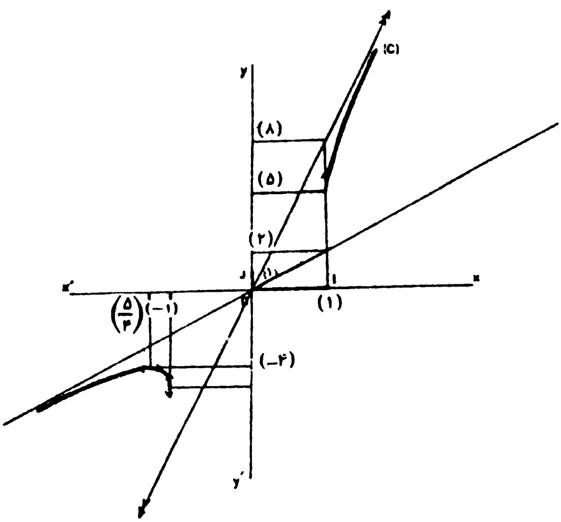
$$\lim(f(x)-2x)=\lim_{x\to-\infty}\left[3x\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\right]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(5+3\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=8 \quad \text{و} \quad (x>0)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-8x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{-3}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\right]=0$$

و خط های $y=2x$ و $y=8x$ مجانبهای مایلند.



مثال ۵- نمودار تابع $x \xrightarrow{f} f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{12-3x^2}$ و $x\in R$ را رسم کنید.

دامنه تعریف: $D_f=[-2\ \text{و}\ 2]$ وتابع روی $[-2\text{و}2]$ معین و پیوسته وروی $]-2\ \text{و}\ 2[$ مشتق پذیر است .

جهت تغییرات: مشتق تابع

$$x \xrightarrow{f'} f'(x)=\frac{\sqrt{12-3x^2}-3x}{2\sqrt{12-3x^2}}$$

جدول تغییرات:

$f(-2)=-1$ $\qquad \lim\limits_{x\to -2^+} f'(x)=+\infty$

$f(2)=1$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=-\infty$

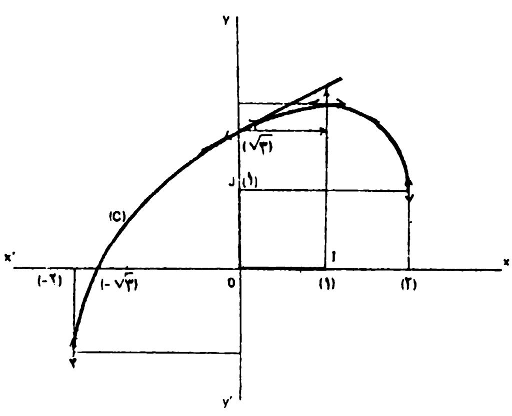
$f(1)=2$

$f(0)=\sqrt{3}$ و $f'(0)=\frac{1}{2}$

$\forall x\in D$ و $\left(f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{12-3x^2}=0\right)$

جواب $x=-\sqrt{3}$ قابل قبول است.

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
$f'(x)$		$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	
$f(x)$		-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	



شکل ۸

مثال ۶- نمودار تابع f باضابطهٔ $x \xrightarrow{f} f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ را رسم کنید.

حل:

۱- دامنه تعریف : $D_f = R$ است و تابع روی فاصله $]-\infty, +\infty[$ معین و پیوسته و روی $]-\infty, 0[$ و $]0, 1[$ و $]1, +\infty[$ مشتق پذیر است.

۲- جهت تغییرات:

$$x \xrightarrow{f'} f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}}$$

در نقاط $x = 0$ و $x = 1$ تابع مشتق‌پذیر نیست‌زیرا؛

$$\lim_{x \to 0} |f'(x)| = \lim_{x \to 0} \left| \frac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}} \right| = \lim_{x \to 0} \left| \frac{3x - 2}{3\sqrt[3]{x(x-1)^2}} \right| = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1} f'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x}{3\sqrt[3]{x^4(x-1)^2}} = +\infty$$

و جهت تغییرات تابع بستگی به علامت $(3x^2 - 2x)$ دارد.

۳- جدول تغییرات:

a) حد:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

b) نقاط مهم:

$$f(0) = 0 \qquad f'(0) = \infty$$

$$f(1) = 0 \qquad f'(1) = +\infty$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$$

x	$+\infty$		۰		$\frac{۲}{۳}$		۱		$+\infty$
f'(x)		$++\infty$ ‖ $-\infty$		$-$	۰	$+$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$+$	
f(x)	$-\infty$	↗	۰	↘	$\frac{-\sqrt[۳]{۴}}{۳}$	↗	۰	↗	$+\infty$

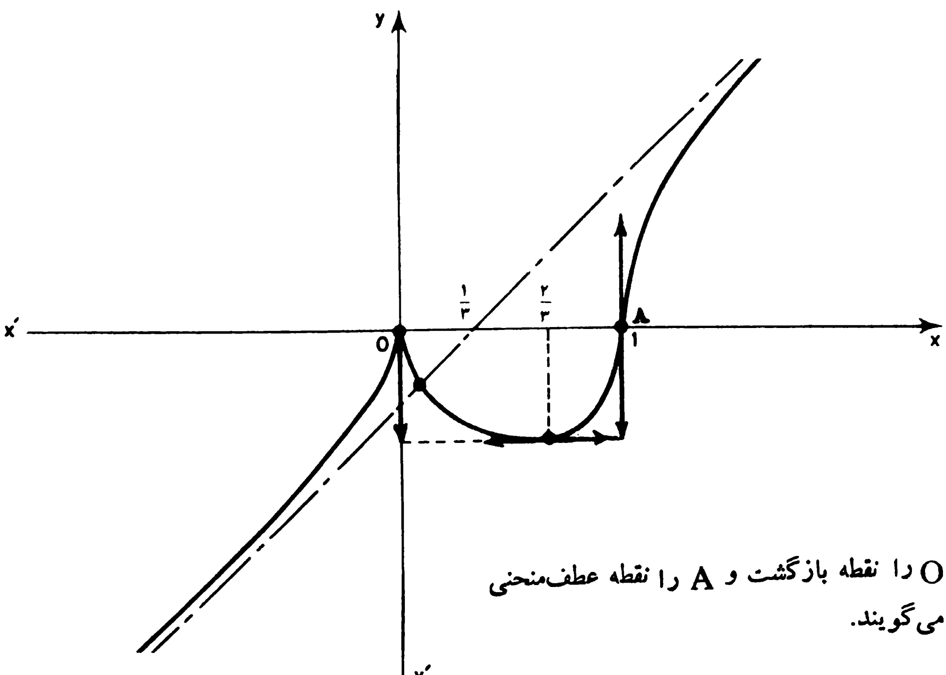
۴ـ مجانب:

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\frac{f(x)}{x}=\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\frac{\sqrt[۳]{x^۳-x^۲}}{x}=۱$$

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}(f(x)-x)=\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}(\sqrt[۳]{x^۳-x^۲}-x)=$$

$$\underset{x\to\pm\infty}{\text{حد}}\frac{-x^۲}{\sqrt[۳]{(x^۳-x^۲)^۲}+x\sqrt[۳]{x^۳-x^۲}+x^۲)}=-\frac{۱}{۳}$$

خط D به معادله $y=x-\frac{۱}{۳}$ مجانب مایل تابع است.



O را نقطه بازگشت و A را نقطه عطف‌منحنی می‌گویند.

مثال ۷- نمودار هندسی تابع $x \overset{f}{\longmapsto} f(x) = \sqrt{(x-۱)^۲} + \frac{۱}{x}$ را رسم کنید.

دامنه تعریف: $D_f = R - \{۰\}$

جهت تغییرات: مشتق $x \overset{f'}{\longmapsto} f'(x) = \frac{x-۱}{\sqrt{(x-۱)^۲}} - \frac{۱}{x^۲}$

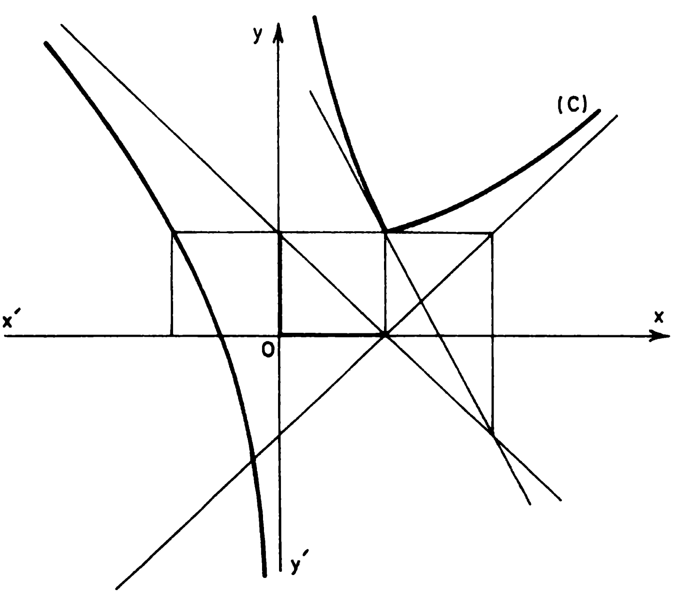
$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \bar{۰}} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to \overset{+}{۰}} f(x) = +\infty \end{cases}$$

جدول تغییرات:

x	$-\infty$	۰	۱	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$ $-$	$-۲ \Vert ۰$	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	$\Vert$ $+\infty \searrow$	$۱ \nearrow$	$+\infty$

مجانبها : $y = -x + ۱$ و $y = x - ۱$ و $x = ۰$ چرا؟



مثال ۸ـ تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع: $y=2-\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$

دامنه تعریف: برای اینکه تابع معین باشد باید $\frac{x-2}{x+1}\geqslant 0$ یعنی $x\geqslant 2$ یا $x<-1$

و تابع در این فاصله معین وپیوسته و در فاصلهٔ $x>2$ و $x<-1$ مشتق پذیر است.

جهت تغییرات: مشتق تابع پس از ساده کردن.

و مشتق همواره منفی است.

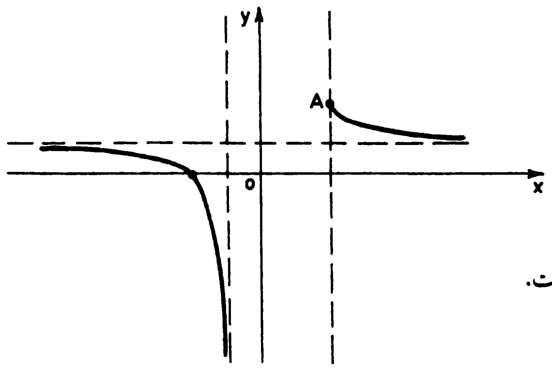
$$y'=\frac{-3}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}}$$

جدول تغییرات:

$$\begin{cases}x\to -1\\ y\to -\infty\end{cases},\quad \begin{cases}x\to \pm\infty\\ y\to 1\end{cases},\quad \begin{cases}x=-2\\ y=0\end{cases},\quad \begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		-1		2		$+\infty$
y'		$-$			$-\infty$	▨	$-\infty$	$-$	
y	1	↘	0	↘	$-\infty$	▨	2	↘	

خط $x=-1$ مجانب قائم و خط $y=1$ مجانب افقی منحنی است.



منحنی در A برخط $x=2$ مماس است.

تمرین:

جهت تغییرات و نمودار هندسی هریك ازتوابع زیررا رسم کنید.

۱) $y=\sqrt{x+2}$

۲) $y=\sqrt{-x+4}$

۳) $y=\sqrt{|1-x|}$

۴) $y=\sqrt{2-|x|}$

۵) $y=x-\sqrt{x}$

۶) $y=x+\sqrt{x}$

۷) $y=x-۲\sqrt{x-۱}$

۸) $y=\sqrt{-x^۲-x+۲}$

۹) $y=\sqrt{-۲x^۲+۱۶x-۳۰}$

۱۰) $y=۱+\sqrt{-x^۲+۴x}$

۱۱) $y=۱-\sqrt{-۴x^۲+۹}$

۱۲) $y=x+\sqrt{۲-x^۲}$

۱۳) $y=۲x-\sqrt{x^۲-۱}$

۱۴) $y=\sqrt{x^۲-۴x+۹}$

۱۵) $y=\sqrt{x^۲-۴x-۵}$

۱۶) $y=x-\sqrt{x^۲-۲x}$

۱۷) $y=x-۱+\sqrt{x^۲-۲x+۲}$

۱۸) $y=\sqrt{x^۲+۲|x|}$

ب ـ جدول تغییرات هریک از دوتابع را که باهم نوشته شده است تعیین و منحنی نمایش آنها را دریک دستگاه مختصات قائم رسم کنید:

۱۹) $y=x\pm\sqrt{x^۲+۱}$

۲۰) $y=x\pm\sqrt{-x^۲+۸}$

۲۱) $y=۱+x^۲\pm\sqrt{۱-x^۲}$

۲۲) $y=\pm(x+۲)\sqrt{۴-x^۲}$

۲۳) $y=\pm۲x\sqrt{۱-x}$

۲۴) $y=\pm\sqrt[۳]{x^۲-۲x}$

۲۵) $y=\pm\dfrac{x-۱}{\sqrt{x^۲+۱}}$

۲۶) $y=\pm\dfrac{\sqrt{۴-x^۲}}{x-۱}$

ج ـ جهت تغییرات و نمودار هندسی هریک ازتوابع زیررا رسم کنید.

۲۷) $y=۲x\sqrt{۱-x^۲}$

۲۸) $y=(۴x^۲-۱)\sqrt{۱-x^۲}$

۲۹) $y=\sqrt{x}+\sqrt{۴-۲x}$

۳۰) $y=\dfrac{x}{\sqrt{۹-x^۲}}$

۳۱) $y=\sqrt{\dfrac{x^۲+۱}{x^۲-۱}}$

۳۲) $y=\sqrt{\dfrac{x^۲-۱}{x^۲+۱}}$

۳۳) $y=x\sqrt{\dfrac{۱+x}{۱-x}}$

تابعهای مثلثاتی

۵-۴- تعریف - تابع مثلثاتی تابعی از متغیر حقیقی x است که در آن خطوط مثلثاتی قوس x یا خطوط مثلثاتی قوسهای $\frac{p}{q}x$ (p و q اعدادی درست‌اند و $q\neq 0$) بکار رفته باشد. مثل:

$$f(x)=\sin x+\cos x \quad \text{و} \quad f(x)=\sin\frac{x}{3}-\cos\frac{x}{2}$$

تعیین تغییرات ورسم توابع مثلثاتی متناوب

مثال۱- تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش تابع $y=2\sin^2 x-5\sin x+2$ در فاصلهٔ $[0 \text{ و } 2\pi]$

تابع همواره معین و اتصالی است. مشتق آن می‌شود:

$$y'=4\sin x\cos x-5\cos x=\cos x(4\sin x-5)$$

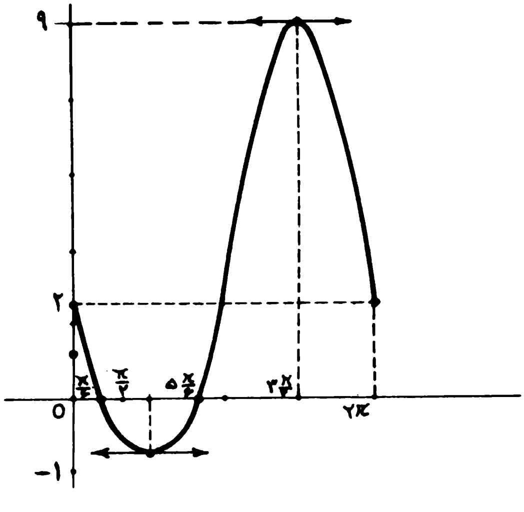
عامل $(4\sin x-5)$ همواره‌منفی است، بنابراین علامت مشتق مخالف علامت $\cos x$ می‌باشد.

ریشه‌های $\cos x=0$ عبارتست از: $\frac{\pi}{2}$ و $3\frac{\pi}{2}$

ریشه‌های قابل قبول $y=0$ عبارتست از ریشه‌هـای $\sin x=\frac{1}{2}$

$$y'=0:\begin{cases}x=\frac{\pi}{2} \text{ یا } x=3\frac{\pi}{2}\\ y=-1 \text{ و } y=9\end{cases},\quad \begin{cases}x=0 \text{ یا } 2\pi\\ y=2\end{cases},\quad \begin{cases}x=\frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{5\pi}{6}\\ y=0\end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
y'			$-$		0		$+$		0	$-$	
y	2	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	9	↘	2



مثال۲ـ تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع: $y=\frac{1-\sin x}{2\sin x-1}$ در فاصلهٔ $[-\pi\ ,\ \pi]$

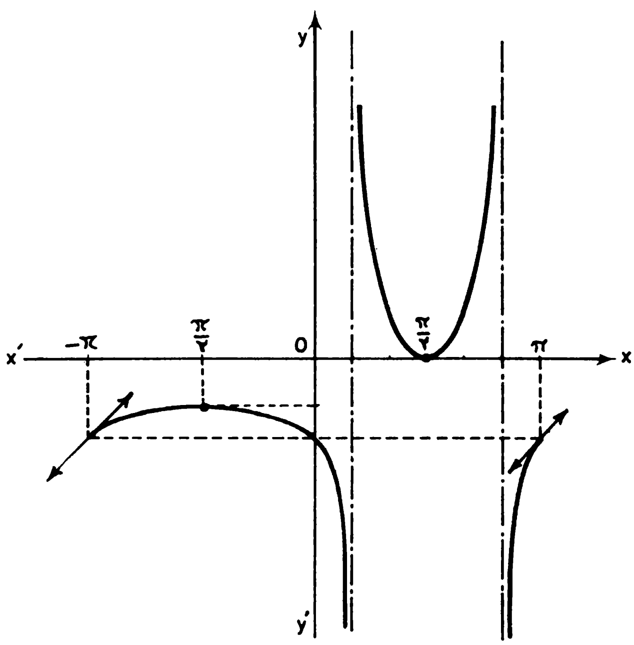
دورهٔ تناوب تابع 2π است. تابع بهازای ریشه‌های $\sin x=\frac{1}{2}$ انفصالی است بنابراین $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{5\pi}{6}$ مجانبهای قائم منحنی می‌باشند.

تابع دراین فاصله بهازای مقادیر $x\neq\frac{\pi}{6}$ و $x\neq\frac{5\pi}{6}$ معین و پیوسته است:

$$y'=\frac{-\cos x}{(2\sin x-1)^{2}}\ ،\ y'=0\ :\ \begin{cases} x=\frac{\pi}{2} \text{ یا } x=-\frac{\pi}{2} \\ y=0 \text{ و } y=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\pi \text{ یا } -\pi \\ y=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\to\frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{5\pi}{6} \\ y\to\pm\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
y'		+	0	−		−	‖	−	0	+	‖	+	
y	-1	↗	$-\frac{2}{3}$	↘	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	-1



مثال ۳- تعیین جدول تغییرات ورسم منحنی نمایش تابع $y=\dfrac{1+tgx}{tgx-\sqrt{3}}$ در فاصله $[0 \text{ و } \pi]$

حل- دوره تناوب تابع $T=\pi$ است تابع را درفاصله $[\pi \text{ و } 0]$ رسم می‌کنیم.
دامنه تعریف تابع:

$$D_f=[0 \text{ و } \pi]-\{\cos x=0 \text{ و } tgx-\sqrt{3}=0\}$$

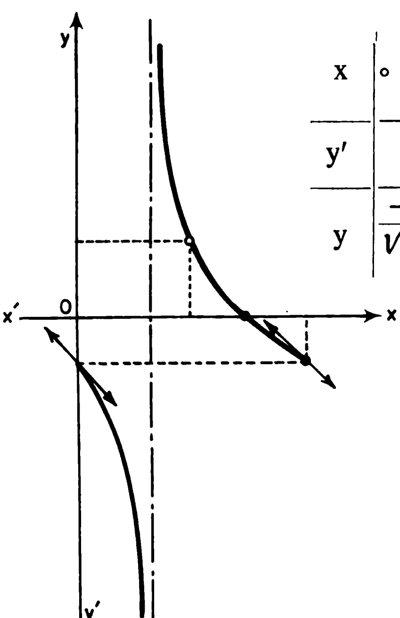
$$D_f=[0 \text{ و } \pi]-\left\{\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{3}\right\}$$

تابع بازای $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ منفصل است.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=1 \qquad \begin{cases} x=\frac{3\pi}{4} \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{\pi}{3} \\ y=\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} f(x)=\infty \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$y'=\frac{-(1+\sqrt{3})(1+tg^2x)}{(tgx-\sqrt{3})^2}<0$$



x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
y'		−	‖	−	‖	−			
y	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1 ‖ 1	↘	0	↘	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$

مثال ۴: جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع $y=\sqrt{۳}\sin x+|\cos x|-۲$ را در فاصله $\left[-\frac{\pi}{۲} و \frac{۳\pi}{۲}\right]$ رسم کنید.

حل: درفاصله $\left[-\frac{\pi}{۲} و \frac{\pi}{۲}\right]$ ، $\cos x\geqslant ۰$ بوده و $|\cos x|=\cos x$

درفاصله $\left[\frac{\pi}{۲} و \frac{۳\pi}{۲}\right]$ ، $\cos x\leqslant ۰$ بوده و $|\cos x|=-\cos x$ می‌باشد.

در نتیجه
$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{۳}\sin x+\cos x-۲ & ، -\frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{۲}\\ \sqrt{۳}\sin x-\cos x-۲ & ، \frac{\pi}{۲}\leqslant x\leqslant\frac{۳\pi}{۲}\end{cases}$$

الف: تابع در فاصله $\left]-\frac{\pi}{۲} و \frac{\pi}{۲}\right[$ مشتق پذیر وپیوسته است و مشتق تابع عبارت است از:

$$y'=\sqrt{۳}\cos x-\sin x=۰$$

$$\sqrt{۳}\cos x-\sin x=۰ \quad ، \quad tg x=\sqrt{۳} \text{ و } x\neq\frac{\pi}{۲} \quad \begin{cases}x=\frac{\pi}{۳}\\ x=۰\end{cases}$$

بازاء $\begin{cases}x=۰\\ y=-۱\end{cases}$ و بازاء $\begin{cases}x=-\frac{\pi}{۲}\\ y=-\sqrt{۳}-۲\end{cases}$ $\begin{cases}x=\frac{\pi}{۲}\\ y=\sqrt{۳}-۲\end{cases}$

وریشه‌های $y=۰$ عبارتند از:

$$\sqrt{۳}\sin x+\cos x-۲=۰ \quad ، \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{۶}\right)=۱ \text{ و } x=\frac{\pi}{۳}$$

ب: تابع درفاصله $\left]\frac{\pi}{۲} و \frac{۳\pi}{۲}\right[$ مشتق‌پذیر وپیوسته است و مشتق تابع عبارت است از:

$$y'=\sqrt{۳}\cos x+\sin x=۰$$

$$\sqrt{۳}\cos x+\sin x=۰ \quad tg x=-\sqrt{۳} \text{ و } x\neq\frac{\pi}{۲} \quad \begin{cases}x=\frac{۲\pi}{۳}\\ y=۰\end{cases}$$

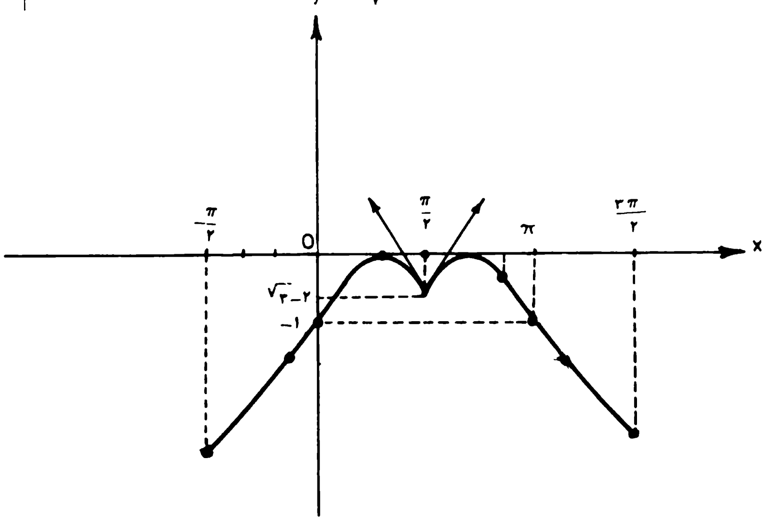
بازاء $\begin{cases}x=\frac{\pi}{۲}\\ y=\sqrt{۳}-۲\end{cases}$ و $\begin{cases}x=\pi\\ y=-۱\end{cases}$ و $\begin{cases}x=\frac{۳\pi}{۲}\\ y=-\sqrt{۳}-۲\end{cases}$

ریشه‌های $y = 0$ عبارتند از:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x - 2 = 0 \text{ ، } \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \text{ ، } x = \frac{2\pi}{3}$$

جدول تغییرات:

x	$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π		$3\frac{\pi}{2}$
y'	$+1$		$+$		0	$-$	$-1 \mid +1$	$+$	0		$-$		-1
y	$-\sqrt{3}-2$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\sqrt{3}-2$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{3}-2$



تذکر: تابع در فاصله $[-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}]$ پیوسته است ولی در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ مشتق‌پذیر نیست.

تمرین

الف ـ دورهٔ تناوب هریك از تابعهای زیر را تعیین و منحنی نمایش هریك را در فاصلهٔ یکی از دوره‌های تناوب رسم کنید:

۱) $y = \sin x$ ۲) $y = \cot g\, x$

۳) $y = 2\sin\frac{x}{3}$ ۴) $y = 4\sin\frac{\pi}{3}x$

۵) $y = tg\, \pi x$ ۶) $y = tg\, 2x + 1$

$$7)\quad y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \qquad\qquad 8)\quad y=\cos\pi x-2\sin\frac{\pi}{2}x-1$$

ب ـ مطلوبست تعیین جدول تغییرات و رسم منحنی نمایش هریك از تابعهای زیر .

$$9)\quad y=\frac{\cos x-1}{2\cos x+1}\ ,\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi$$

$$10)\quad y=\frac{2\sin x+1}{\sin x+2}\ ,\quad -\pi\leqslant x\leqslant \pi$$

$$11)\quad y=\sec x+\operatorname{cosec} x\ ,\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi$$

$$12)\quad y=\frac{1}{1+\cos 2x}-tg x\ ,\quad 0\leqslant x\leqslant \pi$$

$$13)\quad y=\cos x+|\sin x|\ ,\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi$$

$$14)\quad y=tg x+cotg x\ ,\quad -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}$$

د ـ مطلوبست تعیین تغییرات و رسم تابع‌های زیر درفاصله $[0\ ,\ 2\pi]$:

$$15)\quad y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x \qquad\qquad 16)\quad y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$$

$$17)\quad y=\frac{\cos 3x}{\sin 2x} \qquad\qquad 18)\quad y=\frac{\cos x}{tg 2x}$$

$$19)\quad y=\frac{\sin x\cos x+1}{\sin x+\cos x} \qquad\qquad 20)\quad y=\cos x(tg^2 x-1)$$

$$21)\quad y=\frac{2\sin^2 x-\sin x-1}{\sin x+1}$$

هـ ـ جدول تغییرات تابعهای زیررا تعیین ومنحنی‌نمایش هریك را رسم كنید .

$$22)\quad y=\frac{\sin x-\cos x}{\sin 2x}\ ,\qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{3\pi}{2}$$

$$23)\quad y=\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x\ ,\qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$24)\quad y=\sin 3x\cdot\sin x\ ,\qquad 0\leqslant x\leqslant \pi$$

۲۵ ـ تغییرات تابع $y=\dfrac{\sin\pi x}{\sin\frac{\pi x}{2}-\cos\frac{\pi x}{2}}$ را در فاصلهٔ $-2\leqslant x\leqslant 2$ بررسی كنید.

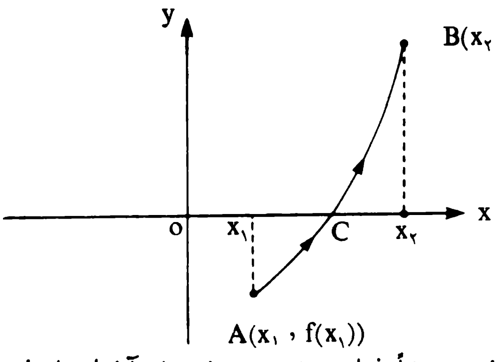
فصل ٦

تعیین تعداد ریشه‌ها وحل تقریبی معادلهٔ درجه سوم

۶-۱- مقدمه : هرچند ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم $f(x)=0$ رابوسیلهٔ فرمولهایی بر حسب ضرایب معادله تعیین نموده‌اند ولی چون ریشه‌ها معمولا به‌صورت‌رادیکالهای مرکب‌با شماره‌های ریشگی ۲و۳ بدست آمده‌اند ، درمورد معادله‌هایی که ضرایبشان حرفی نبوده و اعداد حقیقی‌مشخص‌باشند می‌توان ریشه‌ها را بطور تقریبی به دست آورد .در زیر پس از ذکر دو نکته، راه بدست آوردن ریشه‌های تقریبی معادله بیان‌میشود.

۶-۲- نکته ۱ - هرگاه تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[x_1$ و $x_2]$ معین‌وپیوسته بوده و در یك‌جهت سیر کند (فقط صعودی یا فقط نزولی باشد) و $f(x_1)$ و $f(x_2)$ دارای علامتهای مختلف باشند، حتماً معادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ مذکور یك ریشه دارد.

زیرا مطابق شکل مثلا اگر $f(x_1)<0$ و $f(x_2)>0$ چون تابع در فاصلهٔ $[x_1$ و $x_2]$ صعودی است هرگاه نقطهٔ متغیر M به طول x روی منحنی از A به طرف B تغییر مکان دهد،



یعنی x آن زیاد شود y آن نیز مرتباً زیاد می‌شود وچون عرض آن ابتدا منفی وسپس در B مثبت شده‌است وتابع f پیوسته است ناچار درفاصلهٔ مذکور یك‌جا صفرخواهدشد ومعادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ $[x_1 , x_2]$ یك ریشه دارد.

۶-۳- نکته ۲- تعیین تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم $f(x)=0$

ابتدا مشتق تابع $y=f(x)$ را که یك سه‌جمله‌ای درجه دوم خواهد شد تعیین و مبین مشتق یعنی Δ راتعیین می کنیم؛

الف- هرگاه $\Delta\leqslant 0$ باشد مشتق همواره دارای یك علامت (مگر درریشهٔ مضاعف معادله

درحالت $\Delta=0$) وبالنتیجه تابع $y=f(x)$ از $-\infty$ تا $+\infty$ (یا از $+\infty$ تا $-\infty$ برحسب آن که ضریب درجه سوم مثبت یا منفی باشد) در یك جهت سیر می‌کند ناچار معادله یك ریشه دارد.

ب: $\Delta>0$ دراین‌صورت‌مشتق دارای دوریشه و تابع دارای‌یك‌ماکزیمم‌ویك‌می‌نیموم‌است؛ اگر ماکزیمم و می‌نیموم دارای یك علامت باشند، به سهولت از روی جدول تغییرات تابع معلوم می‌شودکه $f(x)=0$ یك ریشه دارد.

اگر ماکزیمم و می‌نیموم دارای علامتهای مختلف باشند (به سهولت از روی جدول تغییرات‌دیده می‌شود) که معادلهٔ $f(x)=0$ داری سه ریشه است. اگر ماکزیمم یا می‌نیموم صفر باشد (از روی‌جدول تغییرات مشاهده می‌شود) معادله دارای دوریشه است یکی مضاعف (که خود به خود بدست آمده) ویکی ساده است.

برای اینکه مطلب روشن شود به مثالهای ذیل توجه نمائید.

مثال۱- تعیین تعدادریشه‌های معادلهٔ: $x^3-12x+1=0$

تابع $y=x^3-12x+1$ را در نظر می‌گیریم

$$y'=3x^2-12 \implies 3x^2-12=0 \implies x=\pm 2$$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	17	↘	-15	↗	$+\infty$

با توجه به جدول بالا ونکتهٔ۱ ملاحظه می‌شود که معادلهٔ فوق سه ریشه دارد به این شرح: $x_1<-2$ و $-2<x_2<2$ و $x_3>2$

مثال۲- تعیین تعدادریشه‌های معادلهٔ: $x^3+3x^2+3x-4=0$

تابع $y=x^3+3x^2+3x-4$ را درنظر می‌گیریم:

تابع صعودی $y'=3x^2+6x+3$ ، $\Delta=0 \implies y'\geqslant 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	0	+	
y	$-\infty$	↗	-5	↗	$+\infty$

معادله‌یك ریشهٔ$(x_1>-1)$ دارد.

۶-۴ - تعیین ریشه‌های تقریبی معادلهٔ درجهٔ سوم از راه تقریبهای متوالی- با توجه به دو نکته‌ای که در ابتدای این بخش ذکر کردیم ، فرض کنیم بدانیم معادله یك ریشه بین دو مقدار x_1 و x_2 دارد ، یعنی مثلاً $f(x_1)<0$ و $f(x_2)>0$ وبخواهیم آن ریشه را باتقریب به‌خصوصی پیدا کنیم .

ابتدا به جای x عدد دلخواهی مانند x_0 که در فاصلهٔ $]x_1 , x_2[$ باشد قرار میدهیم ، اگر احیاناً $f(x_0)$ صفرشدکه x_0 خود ریشهٔ معادله است . اما اگر $f(x_0)$ صفر نبود مثبت یا منفی می‌باشد . مثلا اگر $f(x_0)>0$ معلوم می‌شود معادله یك ریشه بین x_0 , x_2 دارد زیرا $f(x_0)<0$ و $f(x_2)>0$. به همین‌ترتیب اعداد دیگری را امتحان می‌کنیم (ابتدا اعداد درست تاموقعی‌که ریشه بین دو عدد متوالی باشد ، سپس اعداد اعشاری) تا مثلاً به‌موردی برسیم که داشته باشیم : $f\left(\frac{a}{10}\right)<0$ و $f\left(\frac{a+1}{10}\right)>0$ یا بالعکس (a عددی درست است) در این صورت داریم $\frac{a}{10}<x<\frac{a+1}{10}$ و $\frac{a}{10}$ ریشهٔ تقریبی معادله تا $\frac{1}{10}$ تقریب نقصانی و $\frac{a+1}{10}$ مقدار تقریبی ریشه تا $\frac{1}{10}$ تقریب اضافی است .

حال اگر خواسته باشیم ریشهٔ معادله‌را تا $\frac{1}{100}$ تقریب تعیین‌کنیم چون :

$$\frac{10a}{100}<x<\frac{10(a+1)}{100}$$

می‌باشد ، در فاصلهٔ مذکور به x مقادیر مختلف می‌دهیم تا به موردی برسیم که مثلا داشته باشیم $f\left(\frac{a'}{100}\right)<0$ و $f\left(\frac{a'+1}{100}\right)>0$ (a' عددی درست است) دراین‌صورت داریم:

$$\frac{a'}{100}<x<\frac{a'+1}{100}$$

و $\frac{a'}{100}$ ریشهٔ تقریبی نقصانی معادله و $\frac{a'+1}{100}$ ریشهٔ تقریبی اضافی تا $\frac{1}{100}$ تقریب می‌باشد. به‌همین ترتیب با تقریبهای دیگر $\frac{1}{1000}$ و $\frac{1}{10000}$ ، ...، می‌توان به‌هراندازه که‌خواسته باشیم به ریشه نزدیك شویم .

توجه : هرگاه معادله‌ای دارای یك ریشهٔ گویا باشد و آن را از این راه حل‌کنیم و مثلا ندانیم معادله ریشهٔ گویا $\frac{a}{10}$ یا $\frac{a'}{100}$ داشته باشد از راه فوق ریشهٔ معادله عیناً بدست خواهدآمد.

مثال ۱- حل معادلهٔ $x^3-3x-52=0$

تابع $y=x^3-3x-52$ را درنظر می‌گیریم. داریم: $y'=3x^2-3$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-۵۰	$\searrow$	-۵۴	$\nearrow$	$+\infty$

با توجه به‌جدول می‌بینیم که معادله فقط یک‌ریشهٔ $x>۱$ دارد. حال عددی مثلا ۵ را انتخاب و $f(۵)$ را حساب میکنیم :

$$f(۱)=-۵۴<۰ \text{ و } f(۵)=۵۸>۰ \Rightarrow ۱<x<۵$$

حال مثلا $f(۲)$ را محاسبه می‌کنیم خواهد شد. $f(۲)=-۵۰<۰$ پس ریشهٔ معادلـه $۲<x<۵$ می‌باشد. برای $f(۳)$ داریم:

$f(۳)=-۳۲<۰$ پس خواهیم‌داشت: $۳<x<۵$. اکنون عدد ۴ را امتحان‌می‌کنیم، $f(۴)=۰$ پس ریشهٔ معادله عدد ۴ است.

مثال۲- تعیین ریشه‌های معادلهٔ $x^۳-۳x-۶=۰$ تا ۰٫۱ تقریب نقصانی.

$$y=x^۳-۳x-۶$$

$$y'=۳x^۲-۳$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-۴	$\searrow$	-۸	$\nearrow$	$+\infty$

با توجه به‌جدول می‌بینیم معادله فقط یک‌ریشهٔ $x>۱$ دارد.حال عددی مانند ۳ را کـه از ۱ بزرگتراست‌امتحان می‌کنیم، $f(۳)=۱۲>۰$ پس معادله یک‌ریشه درفاصلهٔ $۱<x<۳$ دارد، زیرا $f(۱)<۰$.

حال عدد ۲ راامتحان می‌کنیم : $f(۲)=-۴<۰$ پس $۲<x<۳$

عدد دلخواه ۲٫۴ را که بین ۳ و ۲ است امتحان می‌کنیم:

$$f(۲٫۴)=۰٫۶۲۴>۰ \Rightarrow ۲<x<۲٫۴$$

عدد ۲٫۳ را امتحان می‌کنیم:

$$f(۲٫۳)=-۰٫۷۳۳ \Rightarrow ۲٫۳<x<۲٫۴$$

بنابراین $x\simeq ۲٫۳$ ریشهٔ معادله با ۰٫۱ تقریب نقصانی است.

۶ - ۵ - حالت کلی بحث در تعداد و علامت ریشه‌های معادله درجه سوم - معادلهٔ درجهٔ سوم

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

را با تبدیل $x=X-\frac{b}{3a}$ می‌توان به معادله‌ای به‌صورت زیردرآورد:

$$X^3+pX+q=0$$

بنابراین کافی است که در تعداد ریشه‌های معادله‌ای از نوع اخیر بحث کنیم.

برای بحث در تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم:

$$x^3+px+q=0 \qquad (1)$$

تغییرات تابع زیر را بررسی می‌کنیم:

$$y=x^3+px+q \qquad (2)$$

مشتق این تابع می‌شود:

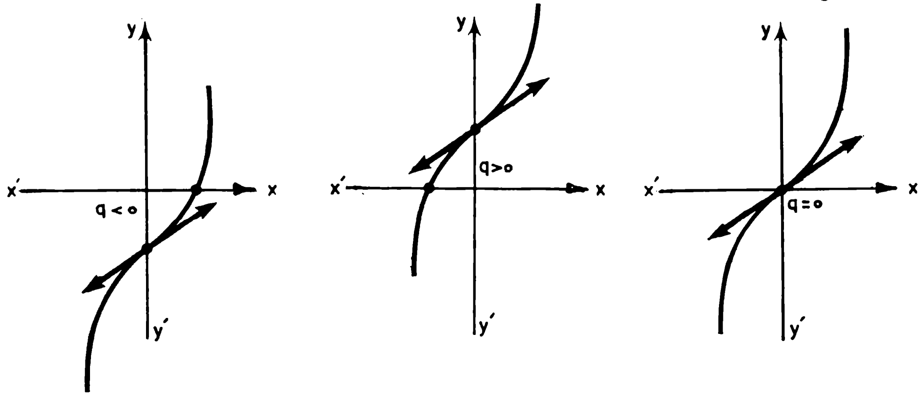
$$y'=3x^2+p \qquad (3)$$

هرگاه $p>0$ معادلهٔ $3x^2+p=0$ ریشه حقیقی ندارد و y' همواره مثبت است.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	$+$		$+$		$+$
y	$-\infty$	$\nearrow$	q	$\nearrow$	$+\infty$

همچنین هرگاه $p=0$ باشد، مشتق در ازای $x=0$ صفر می‌شود اما تغییر علامت نمی‌دهد و به ازای $x\neq 0$ همواره مثبت است. بنابراین در حالت $p\geqslant 0$ تابع (۲) همواره صعودی است و منحنی نمایش تابع فقط در یک نقطه محور xها را قطع می‌کند. یعنی هرگاه $p\geqslant 0$ معادلهٔ (۱) فقط یک ریشه دارد.

اگر $q<0$ باشد آن ریشه مثبت و اگر $q>0$ باشد آن ریشه منفی و اگر $q=0$ باشد آن ریشه صفر است.



هر گاه $p<0$ مشتق درازای دومقدار x_1 و x_2 صفرشده وتغییرعلامت میدهد .

در این حالت تابع (۲) یك ماکسزیمم و یك می‌نیمم دارد . اگر M_1 و M_2 نقطه‌های نظیر ماکزیمم و می‌نیمم باشند باید معلوم کنیم که چه موقع این دو نقطه در یك طرف محور xها و چه موقع در دوطرف آن قرار دارند .

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	q	$\searrow$	y_2	$\nearrow$	$+\infty$

بافرض $M_1(x_1 , y_1)$ و $M_2(x_2 , y_2)$ ازمعادلهٔ $3x^2+p=0$ نتیجه می‌شود که:

$$x_1+x_2=0 \text{ و } x_1x_2=\frac{p}{3} \qquad (4)$$

و از معادلهٔ (۲) خواهیم داشت:

$$y_1y_2=(x_1^3+px_1+q)(x_2^3+px_2+q)$$

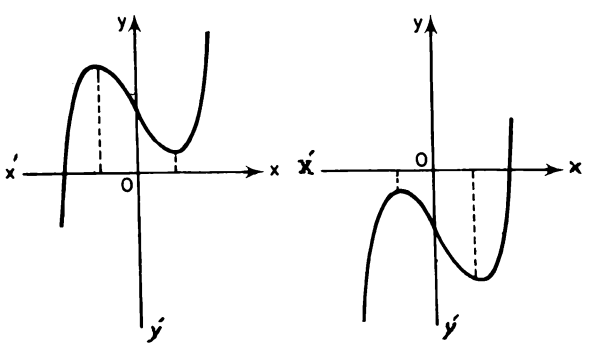
$$y_1y_2=(x_1x_2)^3+px_1x_2[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+ q(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)+pq(x_1+x_2)+p^2x_1x_2+q^2$$

با توجه به رابطه‌های (۴) داریم:

$$y_1y_2=\frac{p^3}{27}-\frac{2p^3}{9}+\frac{p^3}{3}+q^2=\frac{4p^3+27q^2}{27}$$

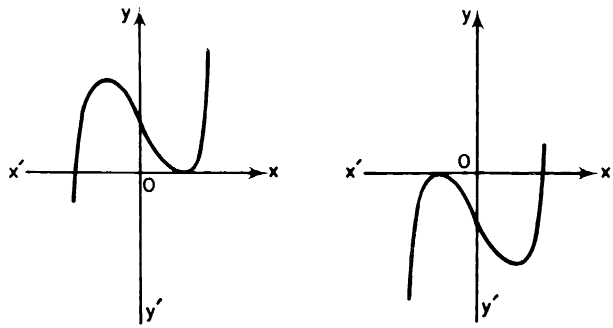
هر گاه $4p^3+27q^2>0$ در این‌صورت $y_1y_2>0$ پس y_1 و y_2 همعلامتند و دونقطهٔ M_1 و M_2 در یك طرف محور $x'x$ واقعند . در این حالت منحنی تابع (۲) فقط در یك‌نقطه محور $x'x$ را قطع می‌کند و معادلهٔ (۱) فقط یك ریشه دارد.

اگر $q<0$ باشد آن ریشه مثبت و اگر $q>0$ باشد آن ریشه منفی است.



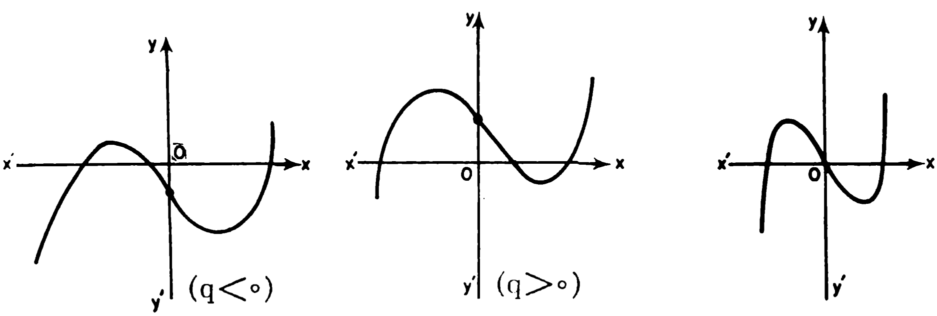
هرگاه $4p^3+27q^2=0$ در این صورت $y_1y_2=0$ و حداقل یکی از دو مقدار y_1 یا y_2 برابر صفر است. پس منحنی نمایش تابع در یك نقطه برمحور $x'x$ مماس و در یك نقطهٔ دیگر آن را قطع می‌کند. در این حالت معادلهٔ (۱) یك ریشهٔ مضاعف و یك ریشهٔ ساده دارد.

اگر $q>0$ ریشه ساده منفی وریشهٔ‌مضاعف مثبت‌واگر $q<0$ ریشه ساده‌مثبت وریشهٔ مضاعف منفی و اگر $q=0$ هرسه ریشه صفر.



هرگاه $4p^3+27q^2<0$ در این‌صورت $y_1y_2<0$ و دونقطهٔ M_1 و M_2 در دوطرف محور $x'x$ واقعند و منحنی نمایش تابع (۲) با محور $x'x$ در سه نقطه متلاقی است. دراین حالت معادلهٔ (۱) سه ریشه دارد.

اگر $q<0$ دوریشه منفی یك‌ریشه مثبت، اگر $q>0$ دو ریشه مثبت‌یکی منفی، اگر $q=0$ یك ریشه صفر ودو ریشهٔ دیگر قرینه‌اند.



خلاصهٔ بحث - با توجه به اینکه اگر $p>0$ باشد $4p^3+27q^2$ نیز مثبت خواهدبود. بحث در تعداد ریشه‌های معادلهٔ $x^3+px+q=0$ به‌صورت‌زیرخلاصه می‌شود:

الف ـ اگر $4p^3+27q^2>0$ ، معادله فقط یك ریشهٔ حقیقی دارد.

ب ـ اگر $4p^3+27q^2=0$ ، به‌فرض $p\neq 0$ معادله یك ریشهٔ حقیقی مضاعف و یك ریشهٔ حقیقی ساده دارد . وهر گاه $p=0$ در این صورت $q=0$ و معادله به‌صورت $x^3=0$ است.

ج ـ اگر $4p^3+27q^2<0$ ، معادله سه ریشهٔ حقیقی دارد.

تبصرهٔ ۱ـ از روی نمودار تابع (۲) در هریك از حالتهای سه‌گانه بالا ، به سادگی می‌توان از روی علامت q علامت ریشه یا ریشه‌های معادله را نیز تعیین کرد.

مثال۱ـ بدون تشکیل جدول ورسم منحنی تعداد وعلامت ریشه‌های معادله $x^3-3x+\frac{1}{3}=0$ را معین کنید.

$$\Delta=4p^3+27q^2=4(-3)^3+27\left(\frac{1}{3}\right)^2=-105<0$$

معادله سه ریشه دارد

چون $q=\frac{1}{3}>0$ استدو ریشه مثبت یکی‌منفی است

مثال ۲ـ بدون رسم منحنی تعدادوعلامت ریشه‌های معادله $x^3-3x^2+x-1=0$ (۱) را تعیین کنید.

حل: با انتخاب مجهول معاون $x=X-\frac{b}{3a}=X+1$ معادله (۱) به صورت (۲) $X^3-2X-2=0$ در می‌آید.

$$\begin{cases}\Delta=4p^3+27q^2=4(-2)^3+27(-2)^2=76>0\\ q=-2<0\end{cases}$$

نتیجه میشود معادله (۲) دارای یك ریشه مثبت است وچون $x=X+1$ می‌باشد معادله (۱) هم دارای یك ریشه مثبت خواهد بود.

تبصرهٔ ۲ـ بعضی‌از معادله‌های درجهٔ سوم را با تبدیلی غیراز $x=X-\frac{b}{3a}$ نیزمی‌توان به‌صورت معادله‌ای‌از نوع (۱) درآورد . به مثال زیر توجه کنید.

مثال۳ـ بحث در تعداد ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم:

$$x^3-3x^2-m=0$$

اگر $m=0$، بدیهی است که معادلهٔ $x^3-3x^2=0$ دارای یك ریشه مضاعف و یك ریشهٔ ساده است.

اگر $m\neq 0$ با فرض $x=\frac{1}{X}$ داریم:

$$X^3+\frac{3}{m}X-\frac{1}{m}=0 \qquad 4p^3+27q^2=\frac{4\times 27}{m^3}+\frac{27}{m^2}=\frac{27(m+4)}{m^3}$$

بحث را به‌صورت جدول زیر خلاصه می‌کنیم:

m	$-\infty$		-۴		۰		$+\infty$
$۴p^۳+۲۷q^۲$		+	۰	−		+	
تعداد ریشه‌ها		یك ریشهٔ ساده	یك‌ریشهٔ ساده ویك ریشهٔ مضاعف	سه ریشه	یك‌ریشهٔ ساده ویك ریشهٔ مضاعف	یك ریشهٔ ساده	

مثال ۴- در وجود وعلامت ریشه‌های معادله درجه سوم زیر بازای مقادیر مختلف m بحث کنید $x^۳-۳x+(۱-m)=۰$ و سپس **بکمك** رسم **منحنی درستی** بحث را بررسی کنید.

$x^۳-۳x+(۱-m)=۰$

$۴P^۳+۲۷q^۲=۴(-۳)^۳+۲۷(۱-m)^۲=۲۷(m^۲-۲m-۳)=۰$

$m=-۱$ و $m=۳$

$q=۱-m=۰ \qquad m=۱$

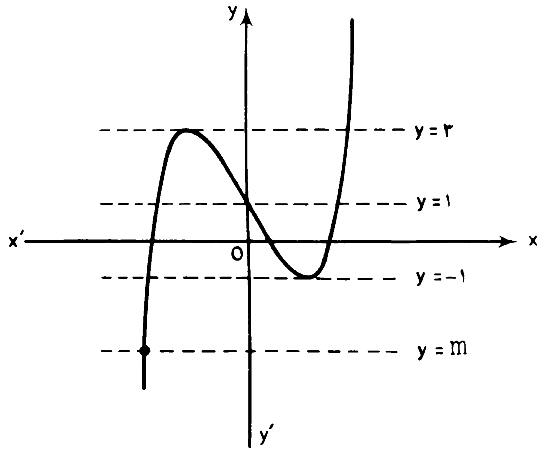
m	$-\infty$		-۱		۱		۳		$+\infty$
Δ		+	۰	−		−	۰	+	
q		+		+	۰	−		−	
نتیجه		یك ریشه منفی	مضاعف مثبت ساده منفی	دوریشه مثبت یك‌ریشه منفی	یك ریشه صفر دو ریشه‌قرینه	دو ریشه منفی یك‌ریشه مثبت	مضاعف منفی ساده مبثت	یك‌ریشه مثبت	

$m=x^۳-۳x+۱$

$y=x^۳-۳x+۱ \qquad y'=۳x^۲-۳=۰ \qquad x=\pm۱$

x	$-\infty$		-۱		۰		۱		$+\infty$
y'		+	۰		−		۰	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	۳	$\searrow$	۱	$\searrow$	-۱	$\nearrow$	$+\infty$

m	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
نتیجه		یک ریشه منفی		دو ریشه مثبت یک ریشه منفی		دو ریشه منفی یک ریشه مثبت		یک ریشه مثبت	
			ریشه مضاعف مثبت ساده منفی		یک ریشه صفر دو ریشه دیگر قرینه		مضاعف منفی ساده مثبت		



۶-۶ - روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه سوم- هرگاه معادلهٔ درجهٔ سوم

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

دارای ریشه‌های حقیقی x_1 و x_2 و x_3 باشد چند جمله‌ای ax^3+bx^2+cx+d بر $(x-x_1)$ و $(x-x_2)$ و $(x-x_3)$ بخش پذیر است وداریم:

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\equiv ax^3+bx^2+cx+d$$

باساده کردن طرف اول ومتحد کردن دو طرف خواهیم داشت:

$$a[x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-x_1x_2x_3]=$$
$$ax^3+bx^2+cx+d$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\dfrac{c}{a} \\ x_1\cdot x_2\cdot x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

مثال- روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3-5x+2=0$ عبارتنداز:

$$x_1+x_2+x_3=0 \quad x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-5 \quad \text{و} \quad x_1x_2x_3=-2$$

نکته: در صورتیکه معادلهٔ $x^3+px+q=0$ دارای ریشه مضاعف باشد یعنی $4p^3+27q^2=0$ باشد.

ریشه‌مضاعف از فرمول:

$$x'=x''=\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

وریشه ساده از فرمول:

$$x'''=-2\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

محاسبه می‌شود.

تمرین

معلوم کنید هریك از معادله‌های زیر چندریشه دارد.

۱) $x^3+2x-5=0$

۲) $x^3-3x+1=0$

۳) $4x^3-6x^2+1=0$

۴ـ معادلهٔ $x^3-3a^2x^2-9a^4x-a^6=0$ مفروض است.

الفـ تحقیق کنید که این معادله به ازای جمیع مقادیر پارامتر a دارای سه ریشهٔ حقیقی است.

بـ روابط بین ضرایب و ریشه‌ها را بنویسید و تحقیق کنید معادلهٔ فوق همواره دارای دو ریشهٔ منفی و یك ریشهٔ مثبت است. $(a\neq 0)$

۵ـ با استفاده از روابط بین ضرایب وریشه‌های یك معادلهٔ درجه سوم دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر را حل کنید:

$$\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=0 \\ x+by+b^2z+b^3=0 \\ x+cy+c^2z+c^3=0 \end{cases}$$

۶ـ معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3-3x^2+2m+2=0$ مفروض است.

الف ــ حدود پارامتر m را چنان تعیین کنید که معادلهٔ فوق دارای سه یا یك ریشهٔ حقیقی باشد.

ب ــ به ازای $m=1$ و $m=-1$ ریشه‌های معادله را بدست آورید.

ج ــ پارامتر m را چنان تعیین کنید که یکی از ریشه‌های معادله دو برابر قرینهٔ دیگری باشد.

$(x_2=-2x_1)$

۷ــ اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^3+(m-1)x^2-(2m+1)x-m=0$ باشد پارامتر m را طوری تعیین که رابطهٔ $\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}=9$ بین ریشه‌ها برقرار باشد.

۸ــ بازای مقادیر مختلف a دروجود وعلامت ریشه‌های معادله زیر بحث کنید.

$x^3-3(a-1)x-2(a-1)=0$

۹ــ بازای چه مقادیری از k خط D به معادله $y=k$ نمودار هندسی تابع با ضابطه $y=1-\dfrac{3x+2}{x^3}$ را در سه نقطه قطع می‌کند اگر α و β و γ طولهای نقاط تلاقی خط ومنحنی باشند k را چنان تعیین کنید که $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=12$ باشد.

۱۰ــ مطلوبست تعیین حدود m ضریب زاویه‌های خطوطی که از مبداء مختصات می‌گذرند و منحنی نمایش تابع $y=\dfrac{x^3+3x+1}{x^2}$ را در سه نقطه متمایز قطع می‌کنند. درحالیکه خط بر منحنی مماس است مختصات نقطه تماس را بیابید.

۱۱ــ معادله $x^3+(p-1)x^2+qx-(p+q)=0$ مفروض است رابطه‌ای بین ریشه‌های این معادله بنویسید که به p و q بستگی نداشته باشد.

۱۲ــ اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^3-mx-2=0$ باشند معادله درجهٔ سوم دیگری بنویسید که ریشه‌های آن γ^3 و β^3 و α^3 باشند.

۱۳ــ اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $2x^3+(m+n)x+m^2n^2=0$ باشند ثابت کنید $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0$.

۱۴ــ اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $2mx^3-3mx^2+1=0$ باشد m را چنان تعیین کنید که رابطه $\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}=6$ بین ریشه‌ها برقرار باشد.

فصل ۷

دیفرانسیل و انتگرال

دیفرانسیل

۷ــ۱ــفرض کنید که تابع $y=f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ معین و در نقطهٔ $x_\circ$ از $]a,b[$ دارای مشتق باشد. اگر در نقطه $x_\circ$ به x نموی به اندازهٔ Δx بدهیم، y نموی بـه اندازهٔ Δy خواهد کرد. می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta x = x - x_\circ$$

$$\Delta y = y - y_\circ = f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ)$$

چون f در نقطهٔ $x_\circ$ مشتق پذیر فرض شده است داریم:

$$(1)\quad f'(x_\circ) = \underset{\Delta x \to \circ}{\text{حد}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

لذاوقتی Δx را کوچکتر و کوچکترسازیم $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ به $f'(x_\circ)$ نزدیکترو نزدیکترمی‌شود، وبرای Δxهای کوچك می‌توان نوشت:

$$f'(x_\circ) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ویا

$$(2)\quad \Delta y \approx f'(x_\circ)\Delta x$$

اگر تفاضل $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_\circ)$ را β بنامیم داریم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_\circ) = \beta$$

$$(3)\quad \Delta y = f'(x_\circ)\Delta x + \beta\Delta x$$

و

از روابط (۲) و (۳) دیده می‌شود که اگر Δy را که نمو تابع است برابر $f'(x_\circ)\Delta x$ اختیار کنیم خطائی به اندازهٔ $\beta\Delta x$ مرتکب خواهیم شد، واین خطا با کوچك شدن Δx کوچك خواهدشد. و به‌سمت‌صفر میل می‌کند.

رابطه (۲) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$(۴) \quad \Delta y = f(x_\circ + \Delta x) - f(x_\circ) \approx f'(x_\circ)\Delta x$$

دربحث فوق اندیس ∘ را در $x_\circ$ برای بیان این منظور که $x_\circ$ درطول بحث ثابت است بکار بردیم.. البته $x_\circ$ می‌تواند هر نقطه‌ای که تابع‌درآن مشتق پذیراست‌باشد. وقتی‌این استنباط ایجادشد، دیگر لزومی به نوشتن اندیس ∘ نیست و می‌توان مطالب فوق را در هر نقطه x که تابع مشتق پذیر است نوشت.

توجه کنید که x و Δx به هم وابسته نیستند وبرای هر x ثابت در D_f علاوه Δx می‌تواند هر مقداری باشد که $x+\Delta x \in D_f$.

در این حالت رابطه‌های (۲) و (۴) به‌صورت‌های زیر درمی‌آید:

$$(۵) \quad \Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

$$\mathbf{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x}$$

واز روی آن می‌توان نوشت :

$$(۶) \quad \mathbf{f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x}$$

این مطالب دریکی از دومورد زیر به کار می‌آیند:

۱ــ معمولا محاسبه Δy کاری‌دشوار است ، درحالیکه محاسبهٔ $f'(x_\circ)\Delta x$ بادر دست‌داشتن $x_\circ$ و Δx کاری ساده‌تر است وبه‌کار بردن $f'(x_\circ)\Delta x$ بجای Δy حجم محاسبات را کم می‌کند.

۲ــ مقدار تابع ومقدار مشتق آن را در نقطه‌ای، مثلا $x_\circ$، می‌دانیم و می‌خواهیم در **نزدیکی و مجاورت $x_\circ$ مقادیر تابع را تخمین بزنیم.**

مثالهای زیراین مطالب را نشان می‌دهند :

مثال ۱ــ نمو تابع $f(x) = ۲\sqrt[۳]{x^۲ - ۱}$ در نقطهٔ $x = ۳$ وقتی که x باندازهٔ ۰/۰۰۱ نمو می‌کند چقدر است؟

حل:

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \qquad f'(x) = \frac{۴x}{۳\sqrt[۳]{(x^۲-۱)^۲}}$$

$$f'(۳) = \frac{۱۲}{۳\sqrt[۳]{(۹-۱)^۲}} = ۱$$

$$\Delta y \approx \Delta x$$

چون $\Delta x = ۰/۰۰۱$ است $\Delta y \approx ۰/۰۰۱$ میشود.

مثال ۲ - فرض کنید که دستور تابع f را نمی‌شناسیم ولی به‌طریقی‌پی برده‌ایم (مثلا ازروی منحنی نمایش f) که مقدار تابع f در نقطهٔ $x_\circ=۲$ برابر ۱- و مقدار مشتق آن در $x_\circ$ برابر ۳ است. می‌خواهیم مقادیر f را در نزدیکی $x_\circ$ حدس بزنیم.

حل : فرض کنید که x نقطه‌ای نزدیك به ۲ و به صورت $۲+\Delta x$ باشد . بنا به رابطهٔ (۶)

داریم :

$$f(۲+\Delta x)\approx f(۲)+f'(۲)\Delta x$$

ویا

$$f(۲+\Delta x)\approx ۳\ \Delta x-۱$$

پس مثلا مقدار تابع در ۲/۰۱و۱/۹ بطور تقریبی چنین‌اند

$$f(۲/۰۱)\approx -۰/۹۷ \text{ و } f(۱/۹)\approx -۱/۳$$

مثال ۳ - مربعی فلزی به ضلع ۱۰ متر را گرم کرده ایم و در اثر گرما اضلاع مربع به‌اندازه یك سانتیمتر بزرگ شده‌اند . مقدار تقریبی مساحت مربع را پس از گرم شدن حساب کنید .

حل : اگر $S(x)$ مساحت مربع به ضلع x باشد ، آنوقت $S(x)=x^۲$. دراین مسأله :

$$x_\circ=۱۰ \text{ و } \Delta x=۰/۰۱ \quad \text{و} \quad S'(x)=۲x \text{ و } S'(۱۰)=۲۰$$

اکنون بنا به رابطهٔ(۶) داریم:

$$S(۱۰+\Delta x)\approx S(۱۰)+S'(۱۰)\Delta x=۱۰۰+۰/۲=۱۰۰/۲$$

پس مساحت مربع تقریباً به اندازهٔ ۰/۲ متر مربع زیادشده است. مقدار واقعی اضافه مساحت $(۱۰/۰۱)^۲-۱۰۰=۰/۲۰۰۱$ است که تفاوت آن با آنچه تخمین زدیم ۰/۰۰۰۱ و در نتیجه عددی کوچك است.

مثال ۴ - فرض‌می کنیم $f(x)=\sin x$ باشد. پس خواهیم داشت $f'(x)=\cos x$ با درنظر گرفتن رابطهٔ تقریبی (۶) می‌توان چنین نوشت:

$$(a) \qquad \sin(x+\Delta x)\approx \sin x+\cos x\Delta x$$

حال اگر بخواهیم مقدار تقریبی $\sin ۴۶^\circ$ را حساب‌کنیم اختیار می کنیم :

$$\Delta x=۱^\circ=\frac{\pi}{۱۸۰} \text{ و } x=۴۵^\circ=\frac{\pi}{۴}$$

داریم

$$۴۶^\circ=۴۵^\circ+۱^\circ=\frac{\pi}{۴}+\frac{\pi}{۱۸۰}$$

اینك با درنظر گرفتن این مقادیر رابطهٔ (a) چنین می‌شود:

$$\sin 46^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{180}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\times\frac{\pi}{180}$$

و از آنجا :

$$\sin 46^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\pi}{180} = 0/7071 + 0/7071 \times 0/017 = 0/7194$$

نکته ـ اگر در فرمول (a) فرض شود $x=0$ و $\Delta x=\alpha$ خواهیم داشت :

$$\sin\alpha \approx \alpha$$

یعنی اگر زاویه بسیار کوچك باشد اندازهٔ آن برحسب رادیان باسینوس آن زاویه تقریباً برابراست.

همچنین اگر $f(x)=tg\,x$ آنوقت $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ و رابطهٔ (۶) چنین می‌شود :

$$tg(x+\Delta x) \approx tg\,x + \frac{1}{\cos^2 x}\times\Delta x$$

حال اگر $x=0$ و $\Delta x=\alpha$ آنوقت $tg\,\alpha\approx\alpha$ شده ونتیجه می گیریم که اگر اندازهٔ زاویه‌ای بسیار کوچك باشد اندازهٔ آن برحسب رادیان با tg آن تقریباً برابر است.

در خطکش محاسبه زوایایی که اندازهٔ آنها کمتر از ۵ درجه و ۴۴ دقیقه است ، مقادیـر سینوس و تانژانت آنها با اندازهٔ خود زاویه برحسب رادیان برابر گرفته می‌شود:

$$(\sin 5^\circ\ ,\ 44' = 0/1)$$

مثال ۵ - اگر $f(x)=\sqrt{x}$ باشد ، از (۶) نتیجه می‌شود :

$$\sqrt{x+\Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\times\Delta x$$

حال اگـر جذر تقریبی ۱۰۵ را بخواهیم کافی است $x=100$ و $\Delta x=5$ اختیارگردد در اینحال خواهیم داشت:

$$\sqrt{105} = 10 + \frac{1}{2\sqrt{100}}\times 5 = 10 + 0/25 = 10/25$$

یا اگر جذر تقریبی ۹۸ را بخواهیم $x=100$ و $\Delta x=-2$ اختیار شده و خواهیم داشت:

$$\sqrt{100-2} = 10 + \frac{1}{2\times 10}\times(-2) = 10 - 0/1 = 9/9$$

حال مناسب است که تعریف زیر را بنمائیم :

تعریف : فرض کنیدکه $y=f(x)$ تابعی مشتق پذیر از x باشد. مقدار

$$(7) \qquad f'(x)\Delta x$$

را که درآن $x\in D_f$ و Δx عددی دلخواه و حقیقی است دیفرانسیل تابع f می‌نامند و با df یا dy نمایش می‌دهند.

اکنون تابع $y=f(x)=x$ را درنظر می گیریم . درمورد این تابع داریم

$f'(x) \equiv 1$ و لذا

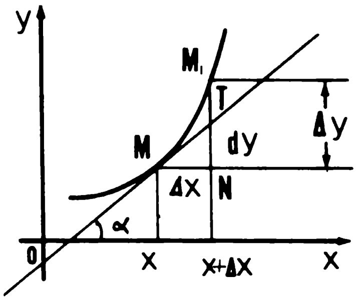
$$dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

در نتیجه $dx = \Delta x$، یعنی دیفرانسیل متغیر مستقل با نمو آن یکی است لذا رابطهٔ (۷) در مورد دیفرانسیل تابع $y = f(x)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

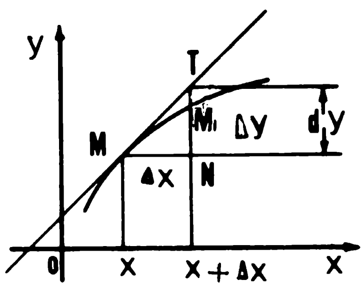
$$dy = f'(x)dx \qquad (8)$$

بنابراین: دیفرانسیل تابع برابر است با مشتق تابع ضربدر دیفرانسیل متغیر.

۷-۲- تعبیر هندسی دیفرانسیل - فرض می کنیم (C) منحنی نمایش تغییرات تابع مشتق پذیر $y = f(x)$ باشد. نقطهٔ دلخواه $M(x,y)$ را روی این منحنی اختیار کرده ومماس برمنحنی در این نقطه را رسم نموده و زاویهٔ این مماس با جهت مثبت محور xها را α می‌نامیم. چون فرض براین است که در این نقطهٔ M تابع دارای مشتق معینی است پس $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ متغیر مستقل را به اندازهٔ Δx تغییر می‌دهیم نقطهٔ نظیر $x + \Delta x$ روی منحنی نقطه M_1 می‌شود که عـرضش $y + \Delta y$ است.



(الف)



(ب)

در مثلث MNT :

$$NT = MN \times tg\alpha$$

چون $tg\alpha = f'(x)$ و $MN = \Delta x$ است پس:

$$NT = f'(x) \cdot \Delta x$$

ولی طبق تعریف دیفرانسیل: $f'(x)\Delta x = dy$ می‌باشد، پس:

$$NT = dy$$

و از آنجا:

دیفرانسیل تابع $f(x)$ به ازای مقادیر مفروض x و Δx برابر است با نمو عرضی خط مماس درنقطه مفروض x برمنحنی $y = f(x)$

در شکل الف دیده می‌شود که: $M_1T = \Delta y - dy$

نباید تصور کرد که همواره Δy از dy بزرگتر است. به طوری که در شکل ب دیده می‌شود :

$$\Delta y = M_1N \quad \text{و} \quad dy = NT \quad \text{و} \quad \Delta y < dy$$

۷-۳- فرمولهای یافتن دیفرانسیل - با درنظر گرفتن رابطهٔ (۸) شماره ۷ — ۱ در زیر فرمولهای دیفرانسیل توابع مختلفی را که تاکنون دیده‌ایم یادآور می‌شویم :

۱) $d(c) = 0$

۲) $d(x) = dx$

۳) $d(u + v - w) = du + dv - dw$

۴) $d(cv) = cdv$ (c مقداری است ثابت)

۵) $d(u \cdot v) = udv + vdu$

۶) $d(u)^n) = nu^{n-1}du$

۷) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

۸) $d\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c}du$ (c مقداری است ثابت)

۹) $d(\sqrt{u}) = \frac{du}{2\sqrt{u}}$

۱۰) $d(\sqrt[n]{u}) = \frac{du}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

۱۱) $d(\sin u) = \cos u du$

۱۲) $d(\cos u) = -\sin u du$

۱۳) $d(\operatorname{tg} u) = \sec^2 u du \qquad \left(\sec u = \frac{1}{\cos u}\right)$

۱۴) $d(\operatorname{cotg} u) = -\operatorname{cosec}^2 u du \left(\operatorname{cosec} u = \frac{1}{\sin u}\right)$

۱۵) $d(\sec u) = \sec u \operatorname{tg} u du$

۱۶) $d(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u du$

تمرین

دیفرانسیل توابع زیر را محاسبه کنید:

۱) $y=۳x^۲-۸x+۹$

۲) $y=\frac{۳x^۲-۷x-۳}{۲x^۲+۹x+۳}$

۳) $y=(۲x^۳+۸x^۲-۹x+۸)^۷$

۴) $y=۲x\sqrt{۱-x^۲}$

۵) $y=\sqrt{\frac{۱-x}{۱+x}}$

۶) $y=x+\sqrt{۱+x^۲}$

۷) $y=\sin^۳ ۲x$

۸ــ تغییر حجم یك استوانه به‌ارتفاع h و به شعاع r را، وقتی که r به‌اندازهٔ dr تغییر کند، بدست آورید. مثال‌عددی $h=۲۰$ و $r=۵$ و $dr=۰/۱$ سانتی‌متر.

۹ــ دورهٔ تناوب یك آونگ ساده به وسیلهٔ $T=۲\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ بدست می‌آید. فرض می‌کنیم $l=۱m$ $g=۹/۸m/s^۲$ باشد.

تغییر T را وقتی که l به‌اندازهٔ ۰/۰۱ متر تغییر کند بدست آورید.

۱۰ــ فرض‌می‌کنیم‌شدت‌جریان برق‌بوسیله‌فرمول $I=\frac{V}{R}$ و $V=۲۲۰$ ولت‌و $R=۵۰$ اهم بدست می‌آید. تغییر I را درهریك ازحالات زیربدست آورید.

اولا: V باندازه ۵ ولت تغییرکند.

ثانیاً: R باندازه ۰/۱ اهم تغییرکند.

۱۱ــ جذر تقریبی $\sqrt{۶۳۰}$ و $\sqrt{۶۲۰}$ و $\sqrt{۷۳۰}$ را بیابید (با استفاده از دیفرانسیل).

۱۲ــ به کمك دیفرانسیل مقدار تقریبی $tg۴۶°$ و $\cos ۴۶°$ و $\sin ۷۶°$ و $tg۲۳°$ را بیابید.

درستی روابط زیر را ثابت کنید.

۱۳) $d\left[(۲۱x^۲-۲۴x+۳۲)\sqrt[۴]{(x+۱)^۳}\right]=\frac{۲۳۱x^۲dx}{۴\sqrt[۴]{x+۱}}$

۱۴) $d[\sin x\cos x(2\cos^2 x+3)+3x]=8\cos^4 x\,dx$

۱۵ـ نخست ثابت کنید که $d(\text{Arctg}\,x)=\frac{dx}{1+x^2}$ سپس درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید:

$$d[x\,\text{Arctg}\,x]=\text{Arctg}\,x\,dx+\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$d(2x^3\text{Arctg}\,x-x^2]=6x^2\text{Arctg}\,x\,dx-\frac{2x}{1+x^2}dx$$

۱۶ـ نخست ثابت کنید $d(\text{Arcsin}\,u)=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ سپس درستی روابط زیر را ثابت کنید:

الف $d(\text{Arcsin}\,2x\sqrt{1-x^2})=d(2\,\text{Arc}\sin x)\quad\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ب $d\left(\text{Arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)=d\left(\text{Arc}\cos x\right)$

ج $d\left(\frac{x}{1+x^2}+\text{Arctg}\,x\right)=\frac{2dx}{(1+x^2)^2}$

انتگرال نامعین

۷ـ ۴ـ پیشگفتارـ درگفتارهای پیشین با مسایلی ازاین قبیل روبرو بودیم:

الفـ تابعی مانند $F(x)$ مفروض است، مشتق این تابع یعنی $f(x)=F'(x)$ را بیابید.

بـ معادلـه یك منحنی $y=F(x)$ است. معادلهٔ ضریب زاویه‌ایهـای مماسهای این منحنی یعنی:

$$\frac{dy}{dx}=F'(x)=f(x)$$

را بیابید. دراین‌گفتار با مسئلهٔ وارون این اعمال روبرو هستیم. یعنی در این مبحث معادله ضریب زاویه‌ایهای مماسهای برمنحنی را می‌دهند و معادلهٔ منحنی را می‌خواهند. یا، مشتق یك تابع را می‌دهند وخود تابع را طلب می کنند.

۷-۵ -تعریف تابع اولیه - تابع $F(x)$ را یك تابع اولیهٔ تابع $f(x)$ در فاصلهٔ I گویند هرگاه درجمیع نقاط I رابطهٔ $F'(x)=f(x)$ برقرار باشد.

مثال ۱- تابع $F(x)=x^4$ تابع اولیهٔ $f(x)=4x^3$ است زیرا:

$$\frac{d(x^4)}{dx}=4x^3$$

مثال ۲- تابع $F(x)=\cos x$ تابع اولیهٔ $f(x)=-\sin x$ است زیرا:

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

مثال ۳ - تابع $f(x)=3x^2+4x$ معادلهٔضریب زاویه‌ای‌های‌مماسهای برمنحنی نمایش تابع $F(x)=x^3+2x^2$ می‌باشد، زیرا:

$$\frac{d}{dx}(x^3+2x^2)=3x^2+4x$$

به آسانی دیده می‌شودکه اگر $f(x)$ یك تابع اولیه داشته باشد ، آنگاه تابع اولیه‌های زیادی دارد . مثلاً در مثال ۱ توابع $F(x)=x^4+1$ و $F(x)=x^4-1$ و $F(x)=x^4+5$ و به‌طورکلی $F(x)=x^4+c$ همگی‌تابع‌اولیه‌های مختلف $f(x)=4x^3$ می باشند، واختلاف آنها درعددی ثابت‌می‌باشد. یعنی اگر $F(x)$ و $\Phi(x)$ دوتابع‌اولیه‌ی $f(x)$ باشند، $F(x)-\Phi(x)=c$ می‌باشد.

زیرا طبق تعریف:

$$F'(x)=f(x) \quad و \quad \Phi'(x)=f(x)$$

و از آنجا:

$$F'(x)-\Phi'(x)=\Big(F(x)-\Phi(x)\Big)'=0$$

اما ثابت می‌کنندکه : هرگاه مشتق تابعی روی یك فاصله متحد صفرباشد، آنگاه آن تابع روی آن فاصله ثابت است.

پس باید $F(x)-\Phi(x)$ برابر مقدار ثابتی باشد تا مشتق آن یعنی $F'(x)-\Phi'(x)$ **متحد صفر گردد .**

مسأله یافتن تابعی‌که مشتق‌آن $f(x)$ باشد ومسأله یافتن تابعی‌که دیفرانسیل آن $f(x)dx$ باشد هردو یکی هستند وجوابهای آنها مانند هم است. ازاین روی میتوان عمل تابع اولیه گرفتن را عکس عمل دیفرانسیل‌گیری نیز دانست . برای مشتق و دیفرانسیل تابع f به ترتیب نمادهای $f'(x)$ و $f'(x)dx$ را به کاربرده‌ایم ؛ ونمادی‌که برای عکس این اعمال به‌کار برده می‌شود $\int f(x)dx$ می‌باشدکه «انتگرال $f(x)dx$» یا بطور مختصر «انتگرال f» خوانده می‌شود و آن هریك ازتوابع اولیه f است . این نماد انتگرال نامعین نیز نامیده می‌شود (واژه نامعین درمقابل واژه معین در مورد انتگرال بکار برده می‌شود ، که بعداً تقریباً باآن‌آشنا خواهید شد.)طبق‌تعریف نماد $\int f(x)dx$ داریم:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

و

$$dy=f'(x)dx$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم

$$\int dy=\int f'(x)dx$$

$$y=f(x)+C$$

واگر F یک تابع اولیهٔ f باشد آنوقت

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

هدف ما دراین بخش یافتن انتگرال برخی از توابعی است که دراین کتاب خوانده‌ایم. البته لازم به تذکر است که انتگرال (یا تابع اولیهٔ) هرتابعی را نمی‌توان به دست آورد.

نخستین فرمولی که درباره انتگرالگیری توابع ارائه می‌دهیم عبارت است از:

$m\neq-1$ عددی است گویا

$$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+c$$

برای اثبات درستی‌فرمول بالا کافی است از $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ دیفرانسیل بگیریم وببینیم که برابر $x^m dx$ می‌شود.

مثال۱- تعیین تابع اولیه $f(x)=x^5$.

طبق فرمول خواهیم‌داشت

$$\int x^5dx=\frac{x^{5+1}}{5+1}+c=\frac{1}{6}x^6+c$$

مثال۲- تابع اولیهٔ $y=\sqrt[5]{x^3}$ می‌شود:

$$\int \sqrt[5]{x^3}dx \quad \int x^{\frac{3}{5}}dx=\frac{x^{1+\frac{3}{5}}}{1+\frac{3}{5}}+c=\frac{x^{1+\frac{3}{5}}}{\frac{8}{5}}+c=\frac{5}{8}x\sqrt[5]{x^3}+c$$

مثال۳- تابع اولیهٔ $y=\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ می‌شود:

$$\int\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}dx=\int x^{\frac{-3}{5}}dx=\frac{x^{-\frac{3}{5}+1}}{-\frac{3}{5}+1}+c=\frac{x^{\frac{2}{5}}}{\frac{2}{5}}+c=\frac{5}{2}\sqrt[5]{x^2}+c$$

مثال۴ـ تعیین تابع اولیهٔ $f(x)=\frac{1}{x^5}$

$$\int\frac{1}{x^5}dx=\int x^{-5}dx=\frac{x^{-5+1}}{-5+1}+c=\frac{x^{-4}}{-4}+c=\frac{-1}{4x^4}+c$$

مثال ۵ــ محاسبهٔ انتگرال $f(x)=\frac{x^3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}}$

$$\int\frac{x^3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x^3}}dx=\int x^3\times x^{\frac{2}{3}}\times x^{-\frac{3}{5}}dx$$

$$=\int x^{\frac{46}{15}}dx=\frac{x^{\frac{46}{15}+1}}{\frac{46}{15}+1}+c=\frac{15}{61}x^{4+\frac{1}{15}}+c=\frac{15}{61}x^4\sqrt[15]{x}+c$$

تمرین

تابع اولیهٔ توابع زیر را نسبت به x بیابید.

۱) $f(x)=x$

۲) $f(x)=x^2+3x$

۳) $f(x)=\frac{1}{x^8}$

۴) $f(x)=\sqrt[9]{x^4}$

۵) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[9]{x^4}}$

۶) $f(x)=\frac{x^4\sqrt[5]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$

از تساویهای زیر y را محاسبه کنید:

۷) $\frac{dy}{dx}=3ax^2$

۸) $\frac{dy}{dx}=3x^3$

۹) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3-4x+4}{x^2}$

۱۰) $\frac{dy}{dx}=\frac{(1+x^2)(1-2x^2)}{x^2}$

۱۱ــ ضریب زاویه‌ای خطی که از نقاط $A(-4,5)$ و $B(2,6)$ می‌گذرد چقدراست؟ معادلهٔ این خط را بااستفاده از انتگرال بیابید.

۱۲ــ یک منحنی ازنقطهٔ $A(2,0)$ می‌گذرد و معادلهٔ ضریب زاویه‌ای آن $3x^2-\frac{1}{x^2}$

است. معادلهٔ منحنی را بیابید.

۷-۶- چند فرمول دیگر برای انتگرال‌گیری

۱- انتگرال‌مجموع یا تفاضل چند جملهٔ‌جبری برابر است با مجموع یا تفاضل‌انتگرالهای یکایک‌آن جمله‌ها یعنی:

$$\int(du+dv-dw)=\int du+\int dv-\int dw \qquad (۱)$$

در رابطهٔ بالا u و v و w تابعهایی از متغیر مستقل مانند x می‌باشند

۲- a عددی است ثابت $\int a dv=a\int dv$ (۲)

۳- n عددی است گویا $n+۱\neq ۰$ و $\int u^n du=\frac{u^{n+۱}}{n+۱}+c$ (۳)

اینك طی‌چند مثال زیر طرز یافتن‌انتگرال برخی از تابعها را به‌کمك دستورهای بالانشان می‌دهیم:

مثال ۱ - محاسبهٔ :

$$\int ۲۴(۳x+۴)^۷dx$$

فرض‌می‌کنیم $u=۳x+۴$ ازآنجا خواهیم داشت:

$$۳dx=du \implies dx=\frac{۱}{۳}du$$

درنتیجه:

$$\int ۲۴(۳x+۴)^۷dx=\int ۲۴u^۷\times \frac{۱}{۳}du$$

$$=\frac{۱}{۳}۲۴\int u^۷\times du=۸\,\frac{u^{۷+۱}}{۷+۱}+c=u^۸+c$$

باقرار دادن مقدار u خواهیم داشت:

$$\int ۲۴(۳x+۴)^۷=(۳x+۴)^۸+c$$

مثال ۲ - محاسبهٔ :

$$\int\frac{۲۴dx}{(-۳x+۶)^۹}$$

فرض می کنیم $u=-۳x+۶$ از آنجا خواهیم‌داشت:

$$-۳dx=du \qquad dx=-\frac{۱}{۳}du$$

$$\int \frac{۲۴dx}{(-۳x+۶)^{۹}} = \int \frac{۲۴\,(-\frac{۱}{۳}du)}{u^{۹}} = \int \frac{-۸du}{u^{۹}}$$

$$= -۸\int u^{-۹}du = -۸ \times \frac{u^{-۹+۱}}{-۹+۱} + c = u^{-۸} + c = \frac{۱}{u^{۸}} + c$$

و از آنجا:

$$\int \frac{۲۴dx}{(-۳x+۶)^{۹}} = \frac{۱}{(-۳x+۶)^{۸}} + c$$

مثال ۳ - محاسبهٔ :

$$\int \frac{۱۴dx}{۵\sqrt[۵]{(۷x-۴)^{۳}}}$$

فرض می‌کنیم $۷x-۴=u$ از آنجا:

$$۷dx = du \implies dx = \frac{۱}{۷}du$$

$$\int \frac{۱۴dx}{۵\sqrt[۵]{(۷x-۴)^{۳}}} = \int \frac{۱۴ \times \frac{۱}{۷}du}{۵\sqrt[۵]{u^{۳}}} = \int \frac{۲}{۵}u^{\frac{-۳}{۵}}du$$

$$= \frac{۲}{۵} \times \frac{u^{-\frac{۳}{۵}+۱}}{-\frac{۳}{۵}+۱} + c = \frac{۲}{۵} \times \frac{u^{\frac{۲}{۵}}}{\frac{۲}{۵}} + c = \sqrt[۵]{u^{۲}} + c$$

سرانجام :

$$\int \frac{۱۴dx}{۵\sqrt[۵]{(۷x-۴)^{۳}}} = \sqrt[۵]{(۷x-۴)^{۲}} + c$$

مثال ۴- محاسبه :

$$\int \frac{(x+۳)dx}{\sqrt{x^{۲}+۶x+۷}}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt{x^{۲}+۶x+۷} = u$ از آنجا :

$$x^{۲}+۶x+۷ = u^{۲} \implies (۲x+۶)dx = ۲udu$$

$$(x+۳)dx = udu$$

$$\int \frac{(x+۳)dx}{\sqrt{x^{۲}+۶x+۷}} = \int \frac{udu}{u} = \int du = u + c$$

سرانجام :

$$\int \frac{(x+۳)dx}{\sqrt{x^۲+۶x+۷}}=\sqrt{x^۲+۶x+۷}+c$$

مثال ۵ - محاسبهٔ :

$$\int \frac{x^۲dx}{\sqrt{۱-x}}$$

فرض می‌کنیم $u=\sqrt{۱-x}$ از آنجا خواهیم داشت :

$$۱-x=u^۲ \Rightarrow x=۱-u^۲ \Rightarrow dx=-۲udu$$

$$\int \frac{x^۲dx}{\sqrt{۱-x}}=\int \frac{(۱-u^۲)^۲(-۲udu)}{u}$$

$$=\int(-۲+۴u^۲-۲u^۴)du=-۲u+\frac{۴}{۳}u^۳-\frac{۲}{۵}u^۵+c$$

$$=-u(۲-\frac{۴}{۳}u^۲+\frac{۲}{۵}u^۴)+c$$

$$=-u\times\frac{۳۰-۲۰u^۲+۶u^۴}{۱۵}+c$$

$$=-\frac{۲}{۱۵}u(۱۵-۱۰u^۲+۳u^۴)+c$$

سرانجام :

$$\int \frac{x^۲dx}{\sqrt{۱-x}}=-\frac{۲}{۵}\sqrt{۱-x}[۱۵-۱۰(۱-x)+۳(۱-x)^۲]+c$$

$$=-\frac{۲}{۵}\sqrt{۱-x}\ (۸+۴x+۳x^۲)+c$$

مثال ۶ - محاسبهٔ :

$$\int(x^۳-۲x^۲+x+۵)(x-۲)^{۱۰۰}dx$$

فرض می‌کنیم $u=x-۲$ از آنجا خواهیم داشت :

$$x=u+۲ \Rightarrow dx=du$$

$$x^۳-۲x^۲+x+۵=(u+۲)^۳-۲(u+۲)^۲+(u+۲)+۵=$$
$$u^۳+۶u^۲+۱۲u+۸-۲u^۴-۸u-۸+u+۲+۵=$$

$$u^۳+۴u^۲+۵u+۷$$

$$\int(x^3-2x^2+x+5)(x-2)^{100}dx=\int(u^3+4u^2+5u+7)u^{100}du$$
$$=\int u^{103}du+4\int u^{102}du+5\int u^{101}du+7\int u^{100}du$$
$$=\frac{u^{104}}{104}+4\frac{u^{103}}{103}+5\frac{u^{102}}{102}+7\frac{u^{101}}{101}+c$$

سرانجام:

$$\int(x^3-2x^2+x+5)(x-2)^{100}=\frac{1}{104}(x-2)^{104}+\frac{4}{103}(x-2)^{103}$$
$$+\frac{5}{102}(x-2)^{102}+\frac{7}{101}(x-2)^{101}+c$$

تمرین

انتگرالهای زیررا حساب کنید :

1) $\int(-9x+8)^6dx$

2) $\int\frac{dx}{(-9x+8)^6}$

3) $\int\sqrt{(4x-3)^2}\,dx$

4) $\int\frac{dx}{\sqrt[7]{(-3x+1)^5}}$

5) $\int(4x^3+8x)\sqrt{x^4+4x^2}\,dx$

6) $\int\frac{(-12x+16)dx}{\sqrt[7]{(-3x^2+8x+9)^5}}$

7) $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{2-x}}$

درستی روابط زیررا ثابت کنید :

8) $\int\sqrt[7]{x^3}\,dx=\frac{7}{10}x\sqrt[7]{x^3}+c$

9) $\int x^9\sqrt[7]{x^3}\,dx=\frac{7}{73}x^{10}\sqrt[7]{x^3}+c$

۱۰) $$\int \frac{dx}{\sqrt[7]{(3x-1)^5}} = \frac{7}{6}\sqrt[7]{(3x-1)^2} + c$$

۱۱) $$\int \frac{(3x+5)dx}{(x-2)^7} = \frac{-3}{5(x-2)^5} - \frac{11}{6(x-2)^6} + c$$

۱۲) $$\int (-2x+1)\sqrt[9]{(-x^2+x)^5}\,dx = \frac{9}{14}(-x^2+x)\sqrt[9]{(-x^2+x)^5} + c$$

۱۳) $$\int (3x+1)(x-2)^{50}dx = \frac{3}{52}(x-2)^{52} + \frac{7}{51}(x-2)^{51} + c$$

۱۴) $$\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3 + c$$

۱۵) $$\int \frac{x^2dx}{(x^3-1)^5} = \frac{-1}{12(x^3-1)^4} + c$$

۱۶) $$\int \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx = -\frac{2(\sqrt{a}-\sqrt{x})^3}{3} + c$$

۱۷) $$\int \frac{(x^2+1)dx}{\sqrt{x^3+3x}} = \frac{2\sqrt{x^3+3x}}{3} + c$$

۱۸) $$\int x^{n-1}\sqrt{a+bx^n}\,dx = \frac{2(a+bx^n)^{\frac{3}{2}}}{3nb} + c$$

۱۹) $$\int \frac{t^2dt}{(a+bt^3)^3} = -\frac{1}{6b(a+bt^3)^2} + c$$

۲۰) $$\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{3}(x+4)\sqrt{1+x} + c$$

۷-۷- مقدار ثابت انتگرال-در پیشگفتار این مبحث ، دیدیم که یك تابع دارای بینهایت انتگرال یا تابع اولیه است که اختلاف آنها در عدد ثابت انتگرالگیری می‌باشد و به‌همین‌جهت نوشتیم :

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

این مقدار ثابت یعنی c بادردست‌داشتن برخی اطلاعات در مورد تابع قابل محاسبه است . به

مثال زیر توجه کنید:

مثال- مشتق تابعی برابر است با:

$$\frac{dy}{dx}=۱۲x^۳+۲۱x^۲-۱۸x+۸$$

مطلوب است یافتن این تابع درصورتی‌که بدانیم مقدار این تابع بەازای $x=۱$ برابر صفر است.

حل- چون:

$$\frac{dy}{dx}=۱۲x^۳+۲۱x^۲-۱۸x+۸$$

از آنجا:

$$dy=(۱۲x^۳+۲۱x^۲-۱۸x+۸)dx$$

در نتیجه:

$$y=\int(۱۲x^۳+۲۱x^۲-۱۸x+۸)dx$$

پس:

$$y=۳x^۴+۷x^۳-۹x^۲+۸x+c$$

طبق صورت مسئله بەازای $x=۱$ خواهیم داشت $y=۰$ در نتیجه:

$$۰=۳+۷-۹+۸+c \Longrightarrow c=-۹$$

سرانجام:

$$\boxed{y=۳x^۴+۷x^۳-۹x^۲+۸x-۹}$$

۷-۸- تعبیر هندسی عدد ثابت انتگرال- این تعبیر را با ذکر مثال زیر تفسیرمی‌کنیم.

مثال- مطلوب‌است تابعی‌که درهر نقطهٔ منحنی نمایش آن معادلهٔ ضریب زاویه‌ای مماس برمنحنی $۲x$ باشد.

حل- چون $\frac{dy}{dx}=۲x$ ، پس:

$$dy=۲xdx$$

و از آنجا:

$$y=\int ۲xdx=x^۲+c$$

حال اگر به‌جای c اعداد مختلف مانند ۲ و ۱ و ۰ و ۱- و ۲- قرار دهیم‌خواهیم داشت:

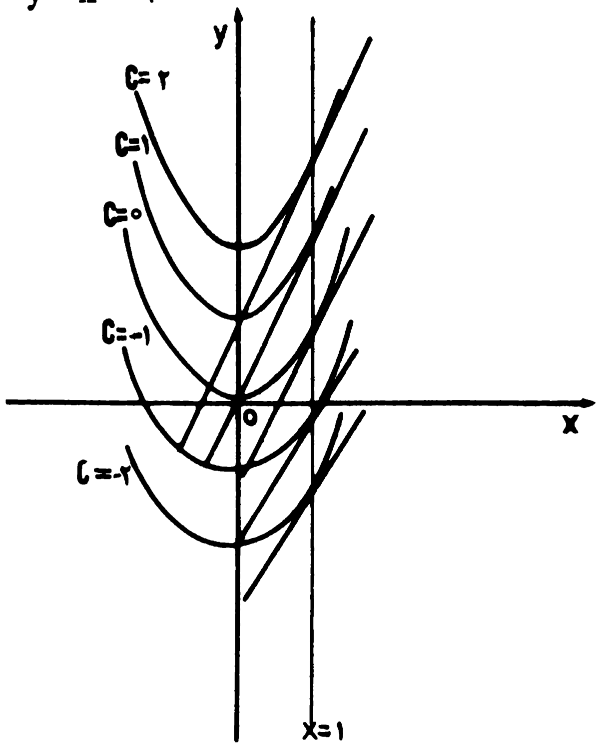
$$c=۲ \Longrightarrow y=x^۲+۲$$

$$c=۱ \Longrightarrow y=x^۲+۱$$

$c=0 \Longrightarrow y=x^2$

$c=-1 \Longrightarrow y=x^2-1$

$c=-2 \Longrightarrow y=x^2-2$



این توابع مختلف متعلق به یک‌خانواده از سهمی ها هستندکه محور yها را به ترتیب درنقاطی به عرض ۲ و ۱و۰ و ۱ – و ۲ – قطـع می‌کنند و به‌ازای یك مقدار ثابت بـرای x ضریب زاویه‌ایهای مماس همگی‌آنها ثابت است. مثلا به‌ازای ۱ = x ضریب زاویهٔ مماس تمامی آنها ۲ است. اگر در این مثال‌اطلاعات دیگری‌داشته باشیم می‌توانیم عدد ثابت و تابع مربوطه را حساب کنیم . مثلاً اگر بدانیم به ازای ۱ = x، مقدار y عدد ۳ است به دست می‌آوریم :

$3=1+c \Longrightarrow c=2$

ودر نتیجه $y=x^2+2$:

تمرین

هریك از عبارتهای زیر دیفرانسیل تابعی می‌باشند . ایـن تابعها را با اطلاعات داده شده بیابید .

دیفرانسیل	مقدار متغیر	مقدار y نظیر
۱) $(۲x-۴)dx$	۲	۵
۲) $(۲ax+b)dx$	۰	c
۳) $(\sqrt{t}+\frac{۱}{\sqrt{t}})dt$	۴	۰
۴) $(\sqrt{۳s+۱})ds$	۵	۸
۵) $(-۴x^۳+۸x-۳)dx$	۱	۰

(۶) ـ مشتق تابعی در نقطهٔ (x,y) برابر $\frac{x+۱}{y+۱}$ است. در صورتی که به ازای $x=۰$
مقدار این تابع ۱ باشد ، این منحنی را بیابید .

جواب : $(y+۱)^۲=(x+۱)^۲+۳$

(۷) ـ مشتق تابعی در نقطهٔ (x,y) برابر $\frac{۴-x}{۲y-۳}$ است درصورتی که به ازای $x=۱$
مقدار این تابع برابر ۲ باشد این منحنی را بیابید .

جواب : $۲(x-۴)^۲+(۲y-۳)^۲=۱۹$

(۸) ـ درصورتی که $\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$ باشد معادلهٔ منحنی رابیابید، **درصورتی که بدانیم به ازای** $x=۳$ **خواهیم داشت** $y=۴$

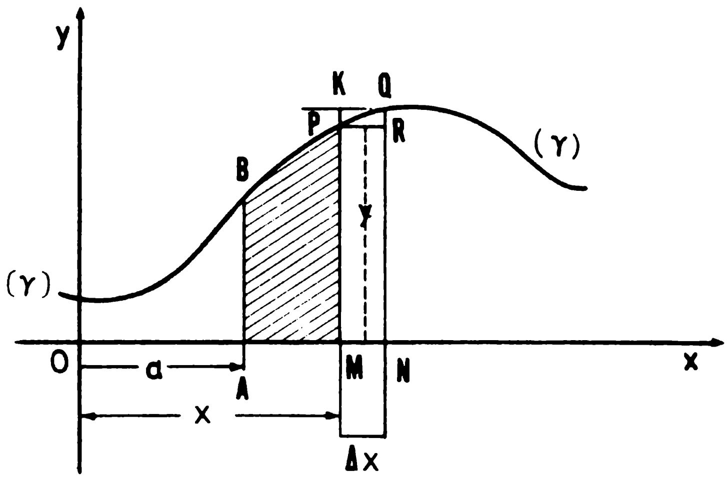
جواب : $x^۲+y^۲=۲۵$

(۹) ـ مشتق تابعی $\sqrt{۳x}-x^۴$ است . مطلوب است این تابع در صورتی که به ازای $x=۳$ **داشته باشیم** $y=۲$

(۱۰) ـ مشتق تابعی $\frac{۳x+۴}{\sqrt{۲x+۱}}$ است . مطلوب است این تابع در صورتی که به ازای $x=۴$ **داشته باشیم** $y=۱$

انتگرال معین

تاکنون هرچه انتگرال دیده‌ایم ، اصطلاحاً «انتگرال نامعین» نامیده می‌شوند . اینک از انتگرالهایی گفتگو خواهیم کرد که آنها را «انتگرال معین» خواهیم نامید . دلیل این نامگذاری را در پایان این گفتار خواهید یافت. انتگرال معین مفهومی است اساسی در ریاضی و فیزیک و مکانیک و سایر رشته‌های علوم.



۷–۹– سطح زیر منحنی — فرض می‌کنیم منحنی (γ) نمایش هندسی تابع پیوسته و غیر منفی $y=f(x)$ در فاصله‌ای باشد. فرض کنید که AB عرض نقطهٔ ثابتی ازاین منحنی درنقطه‌ای به‌طول a و PM عرض متغیری از نقطهٔ متغیر P واقع برمنحنی باشد، سطح محصور بین خطوط AB و AM و MP وقوس $\widehat{BP}$ از منحنی را S می‌نامیم. حال اگر x نمو کوچکی مانند Δx اختیار کند، ΔS، یعنی نمو سطح، سطح محصور بین خطوط PM و MN و NQ و قوس $\widehat{PQ}$ ازمنحنی است. طبق شکل بالا می‌توان چنین نوشت:

$$\text{سطح } MNRP < \text{سطح } MNPQ < \text{سطح } MNQK$$

و ازآنجا:

$$(1)\ MP\times \Delta x<\Delta S<NQ\times \Delta x$$

(توجه: دراین شکـل MP و NQ به ترتیب عرضهای می‌نیمم و ماکزیمم مطلق‌تابع f روی فاصلهٔ $[x,x+\Delta x]$ می‌باشند. درحالت کلی برای آن که رابطه‌ای نظیر (۱) برقرار باشد باید مستطیل داخلی رابه ارتفاع می‌نیمم مطلق تابع روی $[x,x+\Delta x]$ و مستطیل بیرونی را به ارتفاع ماکزیمم مطلق‌تابع روی $[x,x+\Delta x]$ اختیار کرد.)

طرفین‌نامساوی مضاعف بالا را بر Δx تقسیم می‌کنیم (طبق‌شکل $\Delta x>0$ است‌و تقسیم بر Δx جهت نامساوی را تغییر نمی‌دهد):

$$MP<\frac{\Delta S}{\Delta x}<NQ$$

حال Δx را به‌سوی صفـر میل می‌دهیم. چون MP ثابت است عرض QN به سوی MP

نزدیك می‌شود(زیرا y تابعی است پیوسته). درنتیجه خواهیم داشت :

$$\lim_{\Delta x \to 0^+}\left(\frac{\Delta S}{\Delta x}\right)=y(=MP)$$

به همین ترتیب می‌توان برای حالت $\Delta x<0$ بحث را دنبال کرد و به دست آورد که :

$$\lim_{\Delta x \to 0^-}\left(\frac{\Delta S}{\Delta x}\right)=y=(MP)$$

یعنی : $\frac{ds}{dx}=y$ وازآنجا $dS=ydx$ وسرانجام : $S=\int ydx$

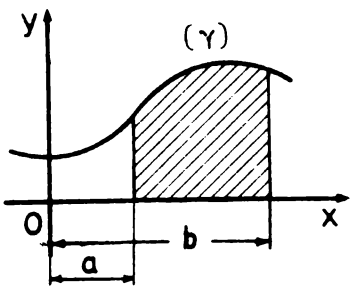
لذا می‌توان قضیه زیر را بیان کرد :

۷ـ۱۰ـ قضیه ـ فرض کنید که تابع f در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و غیرمنفی باشد و $a\leqslant t\leqslant b$. فرض کنید $S(t)$ مساحت سطح محصور به منحنی نمایش f ومحور x ها و خطوط $x=a$ و $x=t$ باشد. آنوقت مشتق تابع S در هر نقطه برابر f است یعنی

$$S'(x)=f(x) \qquad \forall x\in[a,b]$$

حال فرض می کنیم که: $\int f(x)dx=F(x)+c$

هنگامی که x برابر a اختیار شود سطح صفر است و لذا خواهیم داشت:



$$0=F(a)+c$$

وازآنجا: $c=-F(a)$

حال اگر xرا b اختیار کنیم و$F(b)-F(a)$ را بـا $[F(x)]_a^b$ نشان‌دهیم، سطح مربوط برابر خواهد بود با:

$$S(b)=F(b)+c=F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b$$

یعنی :

۷ـ۱۱ـ قضیه ـ فرض کنیدکه F تابع اولیه‌ای برای تابع پیوسته و غیرمنفی f باشد. سطح‌محصور بین منحنی‌نمایش تغییرات‌تابع $y=f(x)$ومحورxهـا و دوخط به معادلهٔ $x=a$و$x=b$(به‌فرض$b>a$) برابر است با:

$$\boxed{S=F(b)-F(a)}$$

مرسوم است که عدد $S=F(b)-F(a)$ را به شکل:

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

بنویسند و آن را چنین قرائت کنند:

« انتگرال $f(x)dx$ از a تا b »

واضح است که حاصل $\int_a^b f(x)dx$ عددی است معین و معلوم و به‌همین دلیل انتگرالهایی

نظیر: $\int_a^b f(x)dx$

را انتگرال معین و سایر انتگرالها را نامعین نامگذاری می‌کنند. a و b را حدود انتگرال معین می گویند .لازم به تذکر است که مفهوم کلی انتگرال معین و انتگرال گیری چیز دیگری‌است ودر آن‌لازم‌نیست‌تابع موردبحث پیوسته یاغیرمنفی باشد . مفهوم‌انتگرال معین را دردرسهای عالی‌تر ریاضی مورد بحث قرار می‌دهند وچیزی‌که مادراینجا به عنوان مساحت زیر منحنی یك تابع غیر منفی و پیوسته مورد بحث قرار دادیم به حالت خاصی از انتگرال معین ارتباط پیدا می‌کند ومقدار مساحت در این حالت همان انتگرال معین تابع خواهد شد.

عدد ثابت در محاسبهٔ انتگرالهای معین از بین میرود ، زیرا :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)+c\Big]_a^b=F(b)+c-F(a)-c=F(b)-F(a)$$

و به همین دلیل درمحاسبات انتگرالهای معین عدد ثابت انتگرالگیری را نمی‌نویسند .

مثال - مطلوب است محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=-x^{۲}+۵x$ ومحور xها وخطوط $x=۱$ و $x=۲$

طبق گفتار بالا خواهیم داشت:

$$S=\int_{۱}^{۴}(-x^{۲}+۵x)dx=\Big[-\frac{x^{۳}}{۳}+\frac{۵x^{۲}}{۲}\Big]_{۱}^{۴}$$

$$=\left(\frac{-۶۴}{۳}+\frac{۸۰}{۲}\right)-\left(-\frac{۱}{۳}+\frac{۵}{۲}\right)=\frac{-۶۳}{۳}+\frac{۷۵}{۲}=-۲۱+\frac{۷۵}{۲}=\frac{۳۳}{۲}$$

یادآوری- در گفتارهای بعد مطالب بیشتری در مورد محاسبهٔ سطح زیر منحنی و حجم حاصل از دوران منحنی حول محور xها بیان خواهیم داشت. دراین گفتار فقط به این مطلب اشاره می‌کنیم که اگر برای محاسبهٔ انتگرال معین به تغییر متغیر نیازمند شدیم باید حدود انتگرالگیری را نیز تغییر دهیم. (البته این مطلب احتیاج به اثبات دارد ولی ما در اینجا آن

را بدون اثبات می‌پذیریم).

مثال - محاسبهٔ:

$$\int_0^3 \frac{(x-2)dx}{\sqrt{5x+1}}$$

فرض می‌کنیم $\sqrt{5x+1}=u$ باشد. درنتیجه:

$$5x+1=u^2 \Longrightarrow 5dx=2udu \Longrightarrow dx=\frac{2}{5}udu$$

$$x-2=\frac{u^2-1}{5}-2=\frac{u^2-11}{5}$$

$$x=3 \Longrightarrow u=\sqrt{5x+1}=\sqrt{15+1}=4$$

$$x=0 \Longrightarrow u=\sqrt{0+1}=1$$

سرانجام:

$$\int_0^3 \frac{(x-2)dx}{\sqrt{5x+1}}=\int_1^4 \frac{\frac{u^2-11}{5}\times\frac{2}{5}udu}{u}=\frac{2}{25}\int_1^4(u^2-11)du$$

$$=\frac{2}{25}\left[\frac{u^3}{3}-11u\right]_1^4=\frac{2}{25}\left[\frac{64}{3}-44-\left(\frac{1}{3}-11\right)\right]$$

$$=\frac{2}{25}(-12)=\frac{-24}{25}$$

تمرین

انتگرالهای معین زیررا حساب کنید:

۱) $\int_2^6(3x^3+4x^2-2x+1)dx$

۲) $\int_1^2 x^5dx$

۳) $\int_1^6(4x^4-3)dx$

۴) $\int_{1}^{2}(x^{2}+1)^{5}\times 2x\,dx$

۵) $\int_{0}^{2}(x^{3}+2)\times 3x^{2}dx$

۶) $\int_{0}^{2}\frac{(8x-3)dx}{\sqrt{4x+1}}$

۷) $\int_{0}^{7}\frac{(x+3)dx}{\sqrt{x+9}}$

انتگرال تابعهای مثلثاتی

۷-۱۲- فرمولهای اصلی- با توجه به فرمولهای مشتق گیری از تابعهای مثلثاتی داریم:

$$d(\cos u)=-\sin u\cdot du$$

$$d(\sin u)=\cos u\cdot du$$

$$d(\operatorname{tg} u)=\sec^{2}u\cdot du=\frac{du}{\cos^{2}u}=(1+\operatorname{tg}^{2}u)du$$

$$d(\operatorname{cotg} u)=-\operatorname{cosec}^{2}u\cdot du=\frac{-du}{\sin^{2}u}=-(1+\operatorname{cotg}^{2}u)du$$

از این فرمولها به‌ترتیب نتیجه خواهد شد:

$$\boxed{\begin{array}{l}(1)\ \int \sin u\cdot du=-\cos u+c\\ (2)\ \int \cos u\cdot du=\sin u+c\\ (3)\ \int\frac{du}{\cos^{2}u}=\int\sec^{2}u\cdot du=\int(1+\operatorname{tg}^{2}u)du=\operatorname{tg}u+c\\ (4)\ \int\frac{du}{\sin^{2}u}=\int\operatorname{cosec}^{2}u\cdot du=\int(1+\operatorname{cotg}^{2}u)du=-\operatorname{cotg}u+c\end{array}}$$

از این فرمولها در انتگرال گیری بسیاری از تابعهای مثلثاتی استفاده می‌شود. به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱ - محاسبهٔ: $I=\int \sin 3x\,dx$

فرض می‌کنیم $3x=u$ ازآنجا $3dx=du$ ، یعنی $dx=\frac{1}{3}du$. در نتیجه:

$$I=\int \sin u \times \frac{1}{3}du=\frac{1}{3}\int \sin u\,du=\frac{1}{3}(-\cos u)+c$$

$$\int \sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}\cos 3x+c$$

مثال ۲ - محاسبه :

$$I=\int 2\cos 2x\,dx$$

فرض می‌کنیم $2x=u$. ازآنجا : $2dx=du$ و $dx=\frac{1}{2}du$:

$$I=\int 2\cos 2x\,dx=\int 2\cos u\times\frac{1}{2}du=\int \cos u\,du=\sin u+c$$

$$\int 2\cos 2x\,dx=\sin 2x+c$$

مثال ۳- محاسبهٔ:

$$I=\int 4(1+tg^2 4x)dx$$

فرض می‌کنیم $4x=u$. ازآنجا $dx=\frac{1}{4}du$ ودرنتیجه:

$$I=\int 4(1+tg^2u)\times\frac{1}{4}du=\int(1+tg^2u)du=tg\,u+c$$

$$\int 4(1+tg^2 4x)dx=tg\,4x+c$$

مثال۴- محاسبهٔ :

$$I=\int\frac{-9dx}{\sin^2 3x}$$

فرض می‌کنیم $3x=u$. ازآنجا $dx=\frac{1}{3}du$. یعنی:

$$I=\int\frac{-9\times\frac{1}{3}du}{\sin^2u}=-3\int\frac{du}{\sin^2u}=+3\times cotg\,u+c$$

$$I=3\,cotg\,3x+c$$

مثال۵- محاسبهٔ: $I=18\int \sin^5x\cos x\,dx$

فرض می‌کنیم $\sin x=u$ درنتیجه $\cos x\,dx=du$ می‌شود وازآنجا:

$$I=18\int u^5du=18\times\frac{u^{5+1}}{5+1}+c=3u^6+c$$

$$I=3\sin^6x+c$$

مثال۶- محاسبهٔ: $I=\int \sin^5 x dx$

نخست یادآور می‌شویم که دراین قبیل مسائل اگر توان $\sin x$ فرد باشد روش زیر را می‌توان بکار برد و اگر توان آن زوج باشد باید روش دیگری درپیش گرفت.

$$I=\int \sin^5 x dx=\int \sin^4 x\times \sin x dx=\int(1-\cos^2 x)^2\times \sin x dx$$

$$=\int \sin x(1+\cos^4 x-2\cos^2 x)dx$$

$$=\int \sin x dx+\int \cos^4 x \sin x dx-2\int \cos^2 x \sin x dx$$

$$=-\cos x+c_1+\int \cos^4 x \sin x dx-2\int \cos^2 x \sin x dx$$

اینك فرض می‌کنیم $\cos x=u$ باشد در نتیجه خواهیم داشت $-\sin x dx=du$ و ازآنجا :

$$\int \cos^4 x \sin x dx=\int u^4(-du)=-\frac{u^5}{5}+c_2$$

$$\int \cos^2 x \sin x dx=\int u^2(-du)=-\frac{u^3}{3}+c_3$$

حال با درنظرگرفتن $c_1+c_2-2c_3=c$ خواهیم داشت:

$$I=-\cos x-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{2\cos^3 x}{3}+c=\frac{-1}{15}\cos x(15+3\cos^4 x-10\cos^2 x)+c$$

مثال۷- محاسبهٔ: $I=12\int \sin^2 3x dx$

نخست چنین می‌نویسیم:

$$I=12\int\frac{1}{2}(1-\cos 6x)dx=6\int dx-6\int \cos 6x dx$$

سپس با روشهای مثالهای بالا عمل می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$I=12\int \sin^2 3x dx=6x-\sin 6x+c$$

مثال۸- محاسبهٔ : $I=36\int \cos^2 6x dx$

طبق مسئلهٔ بالا عمل می‌کنیم. چنین می‌شود:

$$I=36\int \cos^2 6x dx=36\int\frac{1}{2}(1+\cos 12x)dx=18\int dx+18\int \cos 12x dx$$

$$=18x+\frac{3}{2}\sin 12x+c$$

مثال۹- محاسبهٔ : $I=\int \cos^6 x dx$

انتگرال بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$I=\int \cos^6 x\,dx=\int (\cos^2 x)^3 dx$$

$$I=\int\left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^3 dx=\frac{1}{8}\int(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x)dx$$

$$=\frac{1}{8}\int dx+\frac{3}{8}\int \cos 2x\,dx+\frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx+\frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{8}x+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}\int \cos^2 2x\,dx+\frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx$$

ولی می‌توان چنین نوشت:

$$\int \cos^2 2x\,dx=\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\,dx=\int \frac{1}{2}dx+\frac{1}{2}\int \cos 4x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x$$

برای محاسبهٔ $\int \cos^3 2x\,dx$ کافی است آنرا چنین بنویسیم:

$$\int \cos^3 2x\,dx=\int \cos^2 2x\cos 2x\,dx=\int(1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx$$

$$=\int \cos 2x\,dx-\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x-\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx$$

برای محاسبه $\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx$ فرض می‌کنیم $\sin 2x=u$ باشد در نتیجه $2\cos 2x\,dx=du$ بوده وخواهیم داشت:

$$\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx=\int u^2\times\frac{1}{2}du=\frac{1}{6}u^3=\frac{1}{6}\sin^3 2x$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$I=\frac{1}{8}x+\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{6}\sin^3 2x\right)+c$$

سرانجام :

$$I=\frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+c$$

مثال ۱۰- محاسبهٔ :

$$I=\int\frac{tg^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$$

مقدار این تابع ۱ باشد ، این تابع را بیابید.

انتگرال را چنین می‌نویسیم:

$$I=\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\times\frac{1}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}dx$$

$$=\int\frac{\sin x(1-\cos^2 x)dx}{\cos^3 x\times \cos^{\frac{3}{5}} x}=\int\frac{\sin x dx}{\cos^{\frac{18}{5}} x}-\int\frac{\sin x dx}{\cos^{\frac{8}{5}} x}$$

$$=\int \cos^{-\frac{18}{5}} x \sin x dx-\int \cos^{-\frac{8}{5}} x\sin x dx$$

حال فرض می‌کنیم که $u=\cos x$ باشددر نتیجه خواهیم داشت $\sin x dx=-du$
و از آنجا :

$$I=\int u^{-\frac{18}{5}}(-du)-\int u^{-\frac{8}{5}}(-du)$$

$$=-\int u^{-\frac{18}{5}}du+\int u^{-\frac{8}{5}}du=-\frac{u^{-\frac{18}{5}+1}}{-\frac{18}{5}+1}+\frac{u^{-\frac{8}{5}+1}}{-\frac{8}{5}+1}+c$$

$$=\frac{-u^{-2-\frac{3}{5}}}{-\frac{13}{5}}+\frac{u^{-\frac{3}{5}}}{-\frac{3}{5}}+c$$

$$=\frac{5}{13u^2\sqrt[5]{u^3}}-\frac{5}{3\sqrt[5]{u^3}}+c=\frac{5}{\sqrt[5]{u^3}}\left(\frac{1}{13u^2}-\frac{1}{3}\right)+c$$

سرانجام :

$$I=\frac{5}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}\left(\frac{1}{13\cos^2 x}-\frac{1}{3}\right)+c$$

مثال ۱۱- محاسبهٔ : $\int tg^2 x dx$

انتگرال را چنین می‌نویسیم :

$$\int tg^2 x dx=\int(1+tg^2 x-1)dx$$
$$=\int(1+tg^2 x)dx-\int dx=tg x-x+c$$

مثال۱۲- محاسبهٔ: $I=\int tg^4 x dx$

$$I=\int tg^4 x dx=\int (tg^2 x+tg^4 x-tg^2 x)dx$$
$$=\int tg^2 x(1+tg^2 x)dx-\int tg^2 x dx$$

با درنظر گرفتن مثال ۱۱ و فرض $tg x=u$ و از آنجا $(1+tg^2 x)dx=du$ خواهیم‌داشت:

$$I=\frac{1}{3}tg^3 x-tg x+x+c$$

مثال۱۳- محاسبهٔ: $\int cotg^2 x dx$

انتگرال را چنین می‌نویسیم:

$$\int cotg^2 x dx=\int (1+cotg^2 x-1)dx$$
$$=\int (1+cotg^2 x)dx-\int dx=-cotg x-x+c$$

مثال۱۴- محاسبهٔ: $I=\int 120(\sin 3x-\cos 2x)^2 dx$

$$I=\int 120(\sin^2 3x+\cos^2 2x-2\sin 3x\cos 2x)dx$$
$$=\int 120\left(\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}-\sin 5x-\sin x\right)dx$$
$$=\int 120\left(1-\frac{1}{2}\cos 6x+\frac{1}{2}\cos 4x-\sin 5x-\sin x\right)dx$$
$$=\int 120 dx-\int 60\cos 6x dx+\int 60\cos 4x dx-\int 120\sin 5x dx$$
$$-\int 120\sin x dx$$
$$I=120x-10\sin 6x+15\sin 4x+24\cos 5x+120\cos x+c$$

تمرین

انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

۱) $\int \sin x dx$

۲) $\int \cos x dx$

۳) $5\int \sin 5x dx$

۴) $6\int \cos 2x dx$

۵) $\int tg^2 x dx$

۶) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

۷) $\int \frac{dx}{\sin^2 x}$

۸) $\int cotg^2 x dx$

۹) $\int \sin^8 x\cos x dx$

۱۰) $\int \cos^8 x\sin x dx$

۱۱) $\int \sin^7 x dx$

۱۲) $\int \cos^7 x dx$

۱۳) $\int cos^{۴}x dx$ — ۱۴) $\int sin^{۶}x dx$

۱۵) $۸\int tg^{۷}x(۱+tg^{۲}x)dx$ — ۱۶) $۷\int cotg^{۶}x(۱+cotg^{۲}x)dx$

۱۷) $۶\int \frac{sin^{۵}x}{cos^{۷}x}dx$ — ۱۸) $۶\int \frac{cos^{۵}x}{sin^{۷}x}dx$

۱۹) $\int tg^{۵}۳x \times \frac{dx}{cos^{۲}۳x}$ — ۲۰) $\int cotg^{۴}۲x \times \frac{dx}{sin^{۲}۲x}$

۲۱) $۴۸\int (sin۲x - cos۳x)^{۲}dx$ — ۲۲) $\int (sin۳x - sinx)^{۲}dx$

درستی روابط زیر را ثابت کنید.

۲۳) $$\int secx\,tg^{۷}x dx = \frac{۱}{۷cos^{۷}x} - \frac{۳}{۵cos^{۵}x} + \frac{۱}{cos^{۳}x} - \frac{۱}{cosx} + c$$

۲۴) $$\int \frac{dx}{cos^{۲}x\sqrt{۱+tgx}} = ۲\sqrt{۱+tgx} + c$$

۲۵) $$\int \frac{cotg^{۳}x dx}{\sqrt[۵]{sinx}} = \frac{۵۵ sin^{۲}x - ۵}{۱۱ sin^{۲}x\sqrt[۵]{sinx}} + c$$

۲۶) $$\int \frac{cotgx\, dx}{sinx\sqrt{۱+cosecx}} = -۲\sqrt{۱+cosecx} + c$$

۲۷) $$\int \frac{tg^{۷}x.dx}{cos^{۳}x} = \frac{۱}{۹cos^{۹}x} - \frac{۳}{۷cos^{۷}x} + \frac{۳}{۵cos^{۵}x} - \frac{۱}{۳cos^{۳}x} + c$$

۲۸) $$\int \frac{tgx dx}{\sqrt{۱+cos۲x}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲cosx} + c \qquad -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$$

۲۹) $$\int sec^{۲}x\sqrt{cotgx}\, dx = ۲\sqrt{tgx} + c$$

۳۰) $$\int sin^{۲}x cos^{۵}x dx = \frac{sin^{۳}x}{۳} - \frac{۲ sin^{۵}x}{۵} + \frac{sin^{۷}x}{۷} + c$$

۳۱) $$\int tg^{۶}x dx = \frac{۱}{۵}tg^{۵}x - \frac{۱}{۳}tg^{۳}x + tgx - x + c$$

۳۲) $$\int tg^{۶}x sec^{۴}x dx = \frac{tg^{۹}x}{۹} + \frac{tg^{۷}x}{۷} + c$$

۳۳) $$\int sin^{۴}x cos^{۲}x dx = \frac{x}{۱۶} - \frac{sin۴x}{۶۴} - \frac{sin^{۳}۲x}{۴۸} + c$$

$$۳۴)\quad \int (\sin^2 x + \cos x)^2 dx = \frac{7x}{8} + \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin 4x}{32} + c$$

$$۳۵)\quad \int \cot g^6 x dx = -\frac{1}{5}\cot g^5 x + \frac{1}{3}\cot g^3 x - \cot g x - x + c$$

محاسبه سطح و حجم دوار

۷-۱۳-محاسبهٔ سطح بین‌منحنی ومحورطولها - در گفتار انتگرال معین ، اشاره کردیم که سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ ومحورxها، و خطوط $x=a$ و $x=b$ $(b>a)$ با دستور:

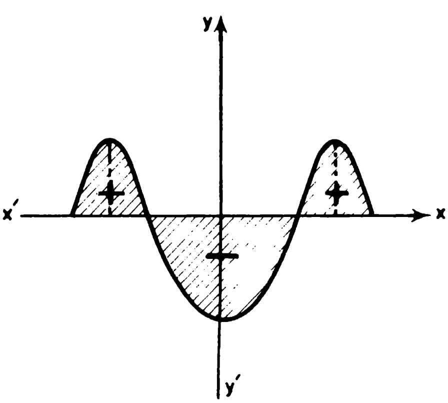
$$S=\int_a^b f(x)dx$$

به دست می‌آید. البته درآنجا فرض براین بودکه مقدار تابع یعنی $f(x)$ درفاصلهٔ $[a,b]$ بزرگتر یامساوی صفر باشد. یعنی داشتیم : $f(x)\geqslant 0$.

اگر در فاصله $[a,b]$ داشته باشیم : $f(x)<0$ و اگر F تابع اولیه‌ای برای f باشد ، آنوقت F نزولی بوده (زیرا مشتق آن یعنی f منفی است) ودرنتیجه عدد

$$\int_a^b f(x)dx \quad = F(b)-F(a)$$

منفی خواهد شد . اگر به همان روش حالت $f(x)\geqslant 0$ دراین حالت بحث کنیم خواهیم دیدکه این عدد منهای مساحت سطح بین منحنی و محور xها وخطوط $x=a$ و $x=b$ خواهد شد.



انتگرال‌معین برابر اندازهٔ سطح می‌شود:

$$S=\left|\int_{a}^{b}f(x)dx\right|$$

پس اگر $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ در چندین نقطه تغییر علامت دهد یا به‌گفتهٔ بهتر در برخی از فواصل $f(x)\geqslant ۰$ و در برخی دیگر $f(x)\leqslant ۰$ باشد. (شکل صفحه قبل)

باید مقدار انتگرال معین را درهریك از فاصله‌ها جداگانه محاسبه نموده وقدرمطلق‌انتگرال معین قسمتهای واقع درزیر محور طولهارا بمقادیر انتگرال معین قسمتهای بالای محور xها افزود تاسطح کل محصور به منحنی و محور xها و خطوط $x=a$ و $x=b$ به دست آید.

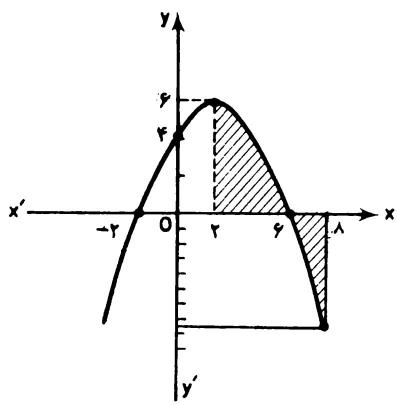
مثال ۱ـ محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع:

$$y=-\frac{۱}{۴}x^{۲}+x+۳$$

و محورxها و خطوط $x=۲$ و $x=۸$

اگر منحنی نمایش تغییرات و جدول مربوط به این تابع را رسم‌کنیم خواهیم داشت:

x	−∞		−۲		۰		۲		۶		+∞
y′			+				۰		−		
y	−∞	↗	۰	↗	۳	↗	۴	↘	۰	↘	−∞



به‌طوری‌که مشاهده می‌شود قسمتی از سطح‌که محصور است بین منحنی و محور xها و خطوط **$x=۲$ و$x=۶$ بالای محور x ها قراردارد. این قسمت را $S_۱$ می‌نامیم ولی قسمتی ازسطح‌که محصور است بین منحنی و محور xها وخطوط $x=۶$ و $x=۸$ زیرمحورxها قرار دارد و لذا**

برای محاسبه آن قدر مطلق انتگرال آن قسمت را می‌یابیم . این قسمت را $S_۲$ می‌نامیم وخواهیم داشت :

$$S_۱=\int_۲^۶\left(-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۳\right)dx=\left[-\frac{۱}{۱۲}x^۳+\frac{۱}{۲}x^۲+۳x\right]_۲^۶=$$

$$\left(-\frac{۲۱۶}{۱۲}+\frac{۳۶}{۲}+۱۸\right)-\left(-\frac{۸}{۱۲}+\frac{۴}{۲}+۶\right)=-\frac{۲۰۸}{۱۲}+۳۶-۸=$$

$$-\frac{۵۲}{۳}+۲۸=\frac{۳۲}{۳}$$

$$S_۲=\left|\int_۶^۸\left(-\frac{۱}{۴}x^۲+x+۳\right)dx\right|=\left|\left[-\frac{۱}{۱۲}x^۳+\frac{۱}{۲}x^۲+۳x\right]_۶^۸\right|$$

$$=\left|\left(-\frac{۵۱۲}{۱۲}+\frac{۶۴}{۲}+۲۴\right)-\left(-\frac{۲۱۶}{۱۲}+\frac{۳۶}{۲}+۱۸\right)\right|=\left|-\frac{۲۹۶}{۱۲}+۲۰\right|$$

$$=\left|-\frac{۷۴}{۳}+۲۰\right|=\left|-\frac{۱۴}{۳}\right|=\frac{۱۴}{۳}$$

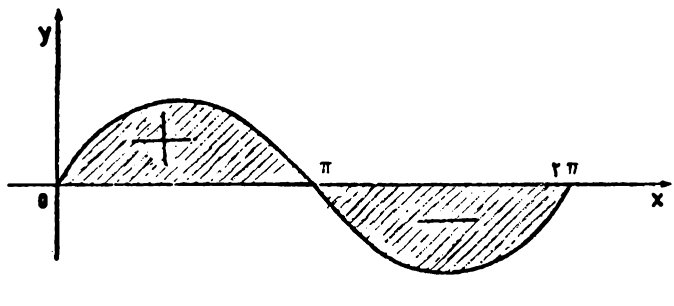
در نتیجه :

$$S=S_۱+S_۲=\frac{۳۲}{۳}+\frac{۱۴}{۳}=\frac{۴۶}{۳}$$

مثال ۲- محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\sin x$ و محور xها و خطوط $x=۰$ و $x=۲\pi$.

چون به ازای $۰\leqslant x\leqslant\pi$ خواهیم داشت : $\sin x\geqslant ۰$ و همچنین به‌ازای $\pi\leqslant x\leqslant ۲\pi$ خواهیم داشت $\sin x\leqslant ۰$ پس خواهیم داشت:

$$S=\int_۰^{\pi}\sin x\,dx+\left|\int_{\pi}^{۲\pi}\sin x\,dx\right|$$



ولی :

$$\int_{0}^{\pi} \sin x dx = \Big[-\cos x\Big]_{0}^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1+1 = 2$$

$$\left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx\right| = \left|\Big[-\cos x\Big]_{\pi}^{2\pi}\right| = \left|-\cos 2\pi + \cos\pi\right|$$

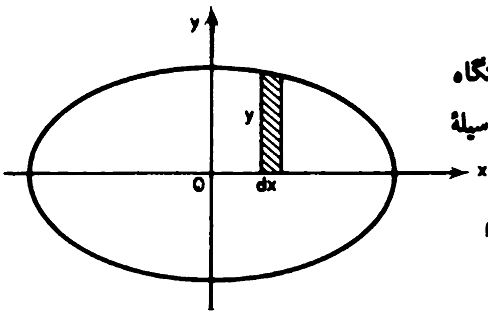
$$= \left|-1-1\right| = 2$$

و ازآنجا :

$$S = 2+2 = 4$$

مثال ۳ : تعیین مساحت بیضی - می‌خواهیم تعیین مساحت بیضی‌ای که به‌وسیلهٔ معادلهٔ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



داده شده‌است را به دست‌آوریم. درصفحه دستگاه محورهای مختصات بیضی مورد بحث را به‌وسیلهٔ شکل نشان داده‌ایم .

اگرمساحت بیضی‌را به S بنامیم خواهیم داشت :

$$S = 4\int_{0}^{a} y dx = 4\int_{0}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx$$

برای محاسبهٔ این انتگرال تغییر متغیر می‌دهیم به‌صورت زیر:

$$x = a\sin t \implies dx = a\cos t dt$$

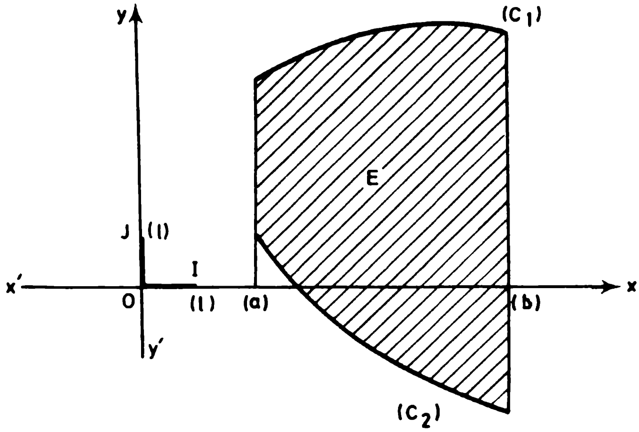
$$0 \leqslant x \leqslant a \implies 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$S = 4\int_{0}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} dx = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ab\cos^2 t dt = 2ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt$$

$$S = 2ab\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$S = \pi ab$$

۷ــ۱۴ــ سطح محصور بین دومنحنیــ برای محاسبهٔ سطح محصور بین منحنیهای نمایش تغییرات دوتابع $y=f_1(x)$ و $y=f_2(x)$ و خطوط $x=a$ و $x=b$ که درآن $f_2(x) \leqslant f_1(x)$ (طبق شکل)، چنین عمل می‌کنیم:



$$S=\int_a^b f_1(x)dx-\int_a^b f_2(x)dx=\int_a^b [f_1(x)-f_2(x)]dx$$

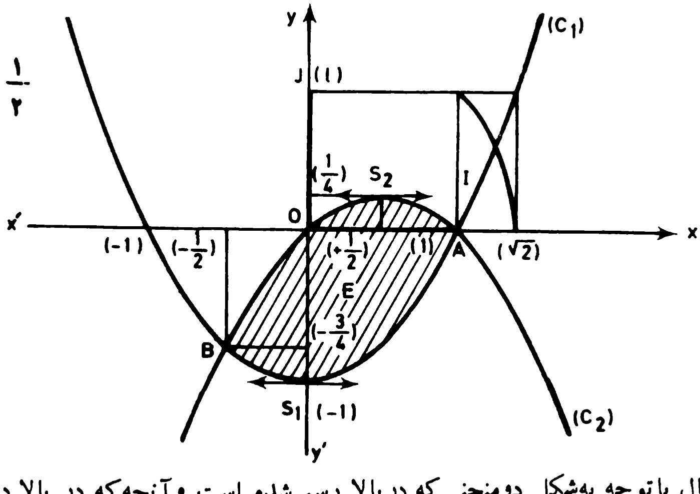
مثال۱ــ محاسبهٔ سطح محصور بین منحنیهای نمایش تغییرات دوتابع زیر:

$$\begin{cases} y=x^2-1 \\ y=-x^2+x \end{cases}$$

نخست طولهای نقاط تقاطع دومنحنی را می‌یابیم:

$$x^2-1=-x^2+x \qquad 2x^2-x-1=0$$

$$\begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$



حال با توجه به‌شکل دومنحنی که دربالا رسم شده است وآنچه‌که در بالا دیده‌ایم خواهیم

داشت:

$$S=\int_{\frac{-1}{2}}^{1}[f_2(x)-f_1(x)]dx=\int_{\frac{-1}{2}}^{1}[(-x^2+x)-(x^2-1)]\,dx$$

$$=\int_{\frac{-1}{2}}^{1}(-2x^2+x+1)dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{\frac{-1}{2}}^{1}=\frac{9}{8}$$

تمرین

۱ـ مطلوب است محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=4-x^2$ و محور xها. (جواب $=10\frac{2}{3}$)

۲ـ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^3$ وخط $y=8$ و محورyها را حساب کنید. (جواب $=12$)

۳ـ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y^2=9x$ وخط $y=3x$ را حساب کنید. (جواب $=\frac{1}{2}$)

۴ـ سطح محصور بین منحنی بـه معادلهٔ $x^2y=a^2$ و محور xهـا و خطـوط $x=a$ و $x=2a$ را حساب کنید $(a>0)$. (جواب $=\frac{a}{2}$)

۵ـ مطلوب است محاسبهٔ سطح محصور بین یکی از طاق‌های منحنی $y=\sin x$ و محور xها. (جواب $=2$)

۶ـ سطح محصور بین سهمی‌های $y^2=2px$ و $x^2=2py$ را حساب کنید.

$\left(\text{جواب}=\frac{4}{3}p^2\right)$

۷ـ تمام سطح محصور بین منحنی $y=x^3$ و خطهای $y=2x$ و $y=x$ راحساب کنید.

$\left(\text{جواب}=\frac{3}{2}\right)$

۷-۱۵- محاسبه حجم برخی از اجسام دوار- فرض می‌کنیم تابع $y=f(x)$ درفاصله **$[a,b]$ معین‌وپیوسته وغیرمنفی‌باشد. دراین گفتارمی‌خواهیم حجم‌حاصل از دوران سطح‌محصوربین** منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=f(x)$ ومحور xها وخطوط $x=a$ و $x=b$ درحول **محورxها را محاسبه‌کنیم. فرض کنید که $a<x<b$ و $V(x)$ حجم آن قسمت از جسم دوار**

که بین صفحات عمود برمحور xها درنقاط به طول xو$x+\Delta x$ واقع شده است برابر است با

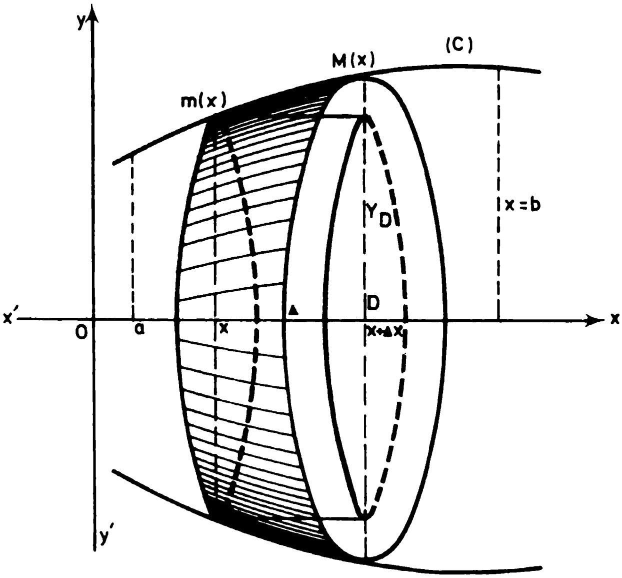
$$\Delta V = V(x+\Delta x) - V(x)$$

فرض کنید که $m(x)$ و $M(x)$ به ترتیب می نیمم مطلق وماکزیمم مطلق تابع f درفاصلهٔ $[x, x+\Delta x]$ باشد. (برای توابع پیوسته ثابت می کنند که چنین ماکزیمم و می نیممی موجود است). آنوقت حجم ΔV ازحجم استوانه به ارتفاع Δx و شعاع قاعده $m(x)$ بزرگتر وازحجم استوانهٔ به ارتفاع Δx وشعاع قاعده $M(x)$ کمتر است. (به شکل مراجعه شود) یعنی

$$\pi m^{2}(x)\Delta x \leqslant \Delta v \leqslant \pi M^{2}(x)\Delta x$$

و چون بر Δx تقسیم کنیم (Δx مثبت فرض شده است) داریم:

$$\pi m^{2}(x) \leqslant \frac{\Delta v}{\Delta x} \leqslant \pi M^{2}(x) \qquad (1)$$



حال اگر Δx را بسمت صفر میل دهیم، چون تابع f در $[x, x+\Delta x]$ پیوسته است ماکزیمم و می نیمم مطلق آن در این فاصله یعنی $M(x)$ و $m(x)$ به سمت $f(x)$ میل کرده و لذا حد دو طرف نامساویهای (۱) باهم برابر میشوند. پس حد $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ نیز موجود بوده و برابر حد مشترك دو طرف (۱) یعنی $\pi f^{2}(x)$ می شود، یعنی

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \pi f^{2}(x)$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \pi f^2(x)$$

پس خواهیم داشت

$$\frac{dv}{dx} = \pi f^2(x)$$

و لذا

$$V(x) = \int \pi f^2(x)dx = \int \pi y^2 dx$$

حال اگر $F(x)$ تابع اولیه‌ای برای $\pi f^2(x)$ باشد آنوقت داریم:

$$V(x) = F(x) + C$$

وچون $V(a) = 0$ ، پس $C = -F(a)$. لذا اگر V حجم جسم دوار حاصل باشدداریم

$$V = V(b) = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

مثال ۱- مطلوب است حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y = x^2 - 6x + 5$ ومحور xها وخطوط $x = 2$ و $x = 4$ حول محور xها.

طبق فرمول خواهیم داشت:

$$V = \int_2^4 \pi y^2 dx = \int_2^4 \pi (x^2 - 6x + 5)^2 dx$$

یا:

$$V = \pi \int_2^4 (x^4 - 12x^3 + 46x^2 - 60x + 25)dx$$

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5} - 3x^4 + \frac{46}{3}x^3 - 30x^2 + 25x\right]_2^4 = \frac{406\pi}{15}$$

مثال ۲- محاسبهٔ حجم حاصل از دوران بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ حول محور xها.

معادلهٔ بیضی را می‌توان چنین نوشت:

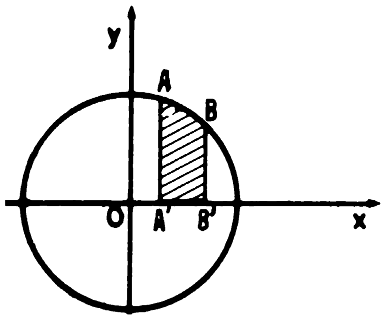
$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

چون دو کرانهٔ بیضی بطولهای $x = a$ و $x = -a$ هستند. پس:

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = 2\pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx$$

$$V = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = 2\pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

مثال ۳ - مطلوب است محاسبهٔ حجم قطعه‌ای از کره به‌شعاع R که بین دوصفحهٔ موازی محصور باشد



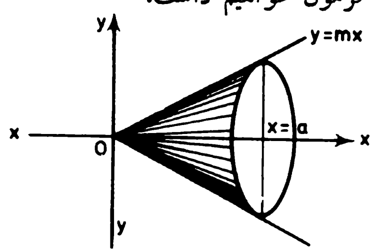
چنین حجمی از دوران سطحی که محصوراست بین محور xها و کمان AB از دایرهٔ $x^2+y^2=R^2$ و خطوط $x=a$ (پاره خط AA') و $x=b$ (پاره‌خط BB') درحول محور xها حاصل می‌شود. پس‌خواهیم داشت :

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b(R^2-x^2)dx=\pi\left|R^2x-\frac{x^3}{3}\right|_a^b$$

$$=\pi(b-a)\left[R^2-\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right]$$

مثال۴- محاسبهٔ حجم حاصل از دوران سطحی حول محور xها که محصور است بین خط $y=mx$ ومحور xها وخط $x=a$ (حجم مخروط).

طبق فرمول خواهیم داشت:



$$V=\pi\int_0^a y^2dx$$

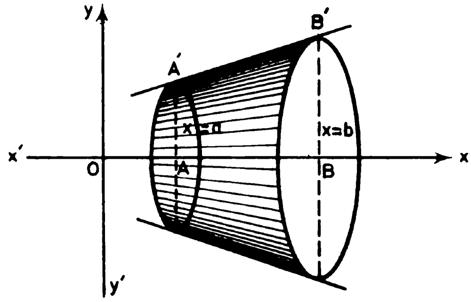
$$V=\pi\int_0^a m^2x^2dx$$

$$V=\pi\left[m^2\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\pi m^2\frac{a^3}{3}$$

با در نظر گرفتن اینکه ma همان AB یعنی شعاع قاعدهٔ مخروط و a طول ارتفاع آن است. خواهیم داشت $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$ که همان دستور هندسی محاسبه حجم مخروط است

مثال۵- محاسبهٔ حجم‌مخروط ناقص‌دواری که‌ازدوران سطح‌محصور بین‌خط $y=mx+n$ ومحور xها وخطوط $x=a$ و $x=b$ درحول محورxها پدید می‌آید.

طبق فرمول خواهیم داشت:



$$V=\pi\int_a^b(mx+n)^2dx$$

$$=\pi\left[\frac{(mx+n)^3}{3m}\right]_a^b$$

$$=\pi\left(\frac{mb+n}{3m}\right)^3-\pi\left(\frac{ma+n}{3m}\right)^3$$

با استفاده از اتحاد $a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab)$ خواهیم داشت:

$$V=\pi\left(\frac{mb+n}{3m}-\frac{na+n}{3m}\right)$$
$$\times[(mb+n)^2+(ma+n)^2+(mb+n)\times(ma+n)]$$

$$V=\frac{\pi}{3}(b-a)[(mb+n)^2+(ma+n)^2+(mb+n)(ma+n)]$$

ولی $b-a$ برابر ارتفاع مخروط ناقص است که در هندسه با h نشان داده می‌شود و $mb+n=BB'$ و $ma+n=AA'$ است که در هندسه به‌ترتیب با R و R' یعنی شعاعهای دوقاعده نشان داده می‌شوند. درنتیجه خواهیم داشت:

$$V=\pi\frac{h}{3}(R^2+R'^2+RR')$$

تمرین

سطح محصور بین محور xها و منحنی‌های زیر و حدود معین شده درهریك‌را محاسبه‌کنید:

۱) $y=x^2+3$ و $x=-1$ و $x=2$ $(S=12)$

۲) $y=x^2(3-x)$ و $x=4$ و $x=5$ $(S=31\frac{1}{4})$

۳) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$ و $x=\frac{1}{2}$ و $x=1$ $(S=1\frac{7}{24})$

سطح محصور بین محور y ها ومنحنی‌های زیروخطوط داده شده در هرقسمت را حساب کنید.

۴) $x=y^2$ و $y=3$ $(S=9)$

۵) $y=x^3$ و $y=1$ و $y=8$ $(S=11\frac{1}{4})$

۶) $x=+\frac{1}{\sqrt{y}}$ و $y=2$ و $y=3$ $(S=2\sqrt{3}-2\sqrt{2})$

سطح محصور بین هریك از منحنی‌های زیر و محور yها را حساب کنید:

۷) $x=(y-1)(y-4)$ $(S=4\frac{1}{2})$

۸) $x=3y-y^2$ $(S=4\frac{1}{2})$

۹) $x=y(y-۲)^{۲}$ $\qquad (S=۱\frac{۱}{۳})$

سطح محصور بین هریك از منحنی‌های زیر و خطوط داده شده را حساب کنید:

۱۰) $y=x^{۲}-۲x+۲$ و $y=۵$ $\qquad (S=۱۰\frac{۲}{۳})$

۱۱) $y=x^{۲}-۶x+۹$ و $y=۱$ $\qquad (S=۱\frac{۱}{۳})$

۱۲) $y=-x^{۲}+۳x-۴$ و $y=-۴$ $\qquad (S=۴\frac{۱}{۲})$

۱۳) $y=x(x-۲)$ $\qquad y=x$ $\qquad (S=۴\frac{۱}{۲})$

۱۴) $y=۴-۳x-x^{۲}$ $\qquad ۲x+y+۲=۰$ $\qquad (S=۲۰\frac{۵}{۶})$

۱۵) $y=x^{۲}-۶x+۲$ $\qquad x+y-۲=۰$ $\qquad (S=۲۰\frac{۵}{۶})$

سطح محصور بین دو منحنی‌داده شده در هریك از مسایل زیر را حساب کنید:

۱۶) $y=x(x-۱)$ و $y=x(۲-x)$ $\qquad (S=\frac{۹}{۸})$

۱۷) $y=x(x+۳)$ و $y=x(۵-x)$ $\qquad (S=\frac{۱}{۳})$

۱۸) $y=x^{۲}-۵x$ و $y=۳x^{۲}-۶x$ $\qquad (S=\frac{۱}{۲۴})$

۱۹) $y^{۲}=۴x$ و $x^{۲}=۴y$ $\qquad (S=\frac{۱۶}{۳})$

۲۰) $y=x^{۲}-۳x-۷$ و $y=۵-x-x^{۲}$ $\qquad (S=۴۱\frac{۲}{۳})$

۲۱– سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات $y=\frac{۱}{x^{۲}}$ وخط $۱۰x+۴y-۲۱=۰$ را محاسبه کنید (راهنمائی – یکی از نقاط تقاطع به طول $-\frac{۲}{۵}$ و عرض $\frac{۲۵}{۴}$ است).

[جواب – نقاط دیگر تقاطع عبارتند از:

$(\frac{۱}{۲}\,,\,۴)$ و $(۲\,,\,\frac{۱}{۴})$ و $S=۱\frac{۱۱}{۱۶}$]

۲۲ـ سطح محصور بین خط $y=\frac{3}{4}x$ و خط $x=4$ و محورxها حول محور طولها دوران می‌کند حجم حاصل را حساب کنید.

(جواب $V=12\pi$)

۲۳ـ سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع $y=x^2$ و خطوط $y=1$ و $y=4$ حول محورyها دوران می‌کند حجم حاصل را حساب کنید.

(جواب $V=\frac{15\pi}{2}$)

راهنمائی ـ ازدستور $V=\int_1^4 \pi x^2 dy$ استفاده کنید :

۲۴ـ سطح محصور بین منحنی $y=x^2+1$ وخط $y=5$ حول محورxها دوران می‌کند. حجم حاصل را محاسبه کنید.

(جواب $V=72\frac{8}{15}\pi$)

هریك از سطوح محصور بین منحنی و خطوط داده شده در زیر حول محور xها دوران می‌کند حجم حاصل را حساب کنید.

۲۵) $x+2y-12=0\ ,\ x=0\ ,\ y=0$ $(V=144\pi)$

۲۶) $y=x^2+1\ ,\ y=0\ ,\ x=0\ ,\ x=1$ $(V=\frac{28}{15}\pi)$

۲۷) $y=\sqrt{x}\ ,\ y=0\ ,\ x=2$ $(V=2\pi)$

۲۸) $y=x(x-2)\ ,\ y=0$ $(V=\frac{16}{15}\pi)$

۲۹) $y=x^2(1-x)\ ,\ y=0$ $(V=\frac{\pi}{105})$

۳۰) $y=\frac{1}{x}\ ,\ y=0\ ,\ x=1\ ,\ x=4$ $(V=\frac{3\pi}{4})$

هریك از سطوح محصور بین منحنی وخطوط داده شده در زیر حول محور yها دوران می‌کند. حجم حاصل را حساب کنید.

۳۱) $y=2x-4\ ,\ y=2\ ,\ x=0$ $(V=18\pi)$

۳۲) $x=\sqrt{y+1}\ ,\ x=0\ ,\ y=2$ $(V=\frac{9\pi}{2})$

۳۳) $x-y^{۲}-۲=۰,\ x=۰,\ y=۰\ ,y=۳\quad (V=۸۶\frac{۳}{۵}\pi)$

۳۴) $y^{۲}=x+۴\ ,\ x=۰\qquad (V=۳۴\frac{۲}{۱۵}\pi)$

۳۵) $y=۱-x^{۳}\ ,\ x=۰\ ,\ y=۰\qquad (V=\frac{۳\pi}{۵})$

۳۶) $xy=۱\ ,\ x=۰\ ,\ y=۲\ ,\ y=۵\quad (V=\frac{۳\pi}{۱۰})$

۳۷ـ در ظرفی‌به شکل نیمکره به شعاع ۱۳ سانتیمترآب می‌ریزیم هنگامی‌که ارتفاع‌آب در داخل ظرف به ۸ سانتیمتر برسد. حجم‌آب را حساب‌کنید.

(جواب $۶۶۱\frac{۱}{۳}\pi cm^{۳}$)

۳۸ـ در ظرف کره‌ای شکل به قطر ۲۰ سانتیمتر بـرای نگاهداری ماهی به ارتفاع ۱۸ سانتیمتر آب ریخته‌ایم حجم آب داخل ظرف را حساب‌کنید.

(جواب $۱۲۹۶\pi cm^{۳}$)

۳۹ـ تابع اولیه تابع $f(x)=\dfrac{۲x}{x+\sqrt{x^{۲}+۱}}$ را بیابیدکه به‌ازای $x=۲$ برابر $\frac{۲}{۳}$ گردد.

۴۰ـ درصورتیکه $f(x)=\dfrac{۴\sin^{۳}x}{۱+\cos x}$ و $۱+\cos x\neq ۰$ باشد مطلوبست محاسبهٔ:

$$I=\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} f(x)dx$$

$$J=\int_{\frac{-\pi}{۳}}^{\frac{\pi}{۳}} f(x)dx$$

۴۱ـ درصورتیکه $f(x)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}+\dfrac{۱}{۲\sqrt{۲-x}}$ و $۰<\lambda<۱$ باشد مطلوبست محاسبهٔ $I=\int_{\lambda}^{۱} f(x)dx$ برحسب λ و حد I وقتی که $\lambda\to ۰^{+}$

۴۲ـ سطح محصور بین منحنی تابع $f(x)=x+1+\frac{4}{(x-1)^2}$ و مجانب مایل آن و دوخط $x=3$ و $x=\lambda>3$ را برحسب λ حساب‌نموده وحد این سطح را وقتی‌که $\lambda\to+\infty$ بدست آورید.

۴۳ـ منحنی (C) نمودار تابع f با ضابطهٔ

$$x\overset{f}{\longmapsto}f(x)=4\sqrt{x}-x \quad \text{و} \quad x\in[0 \text{ و } 4]$$

را رسم کنید. نشان دهیدکه تابع f یك تابع معکوس مانندg داردکه ضابطه و دامنه تعریف وبرد آنرا تعیین خواهید نمود اگر a یك عدد حقیقی از فاصله [۴ و ۰] باشد.

انتگرال زیر را حساب کنید.

$$I(a)=\int_0^a f(x)dx$$

$$J(a)=\int_0^{f(a)} g(y)dy$$

ونشان دهیدکه $I(a)+J(a)=af(a)$ است.

۴۴ـ بدون رسم منحنی سطح محصور بین منحنـــی $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x+1)^2}$ و محورxها و دو خط $x=2$ و $x=\lambda>2$ را برحسب λ بیابید وحد این سطح را وقتی که $\lambda\to+\infty$ حساب کنید.

۴۵ـ تابع مشتق تابع u با ضـــابطهٔ $x\overset{u}{\longmapsto}u(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ را بیابیـــد و با استفاده ازآن تابع اولیه‌های توابع زیررا حساب کنید.

$$x\overset{f}{\longmapsto}f(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{و} \quad x\in R$$

$$x\overset{g}{\longmapsto}g(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}\,(x+\sqrt{x^2+1})} \quad \text{و} \quad x\in R$$

۴۶ـ اولا مطلوبست محاسبه $F(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ و $0<x<1$ برحسب x.

ثانیاً مطلوبست حد $F(x)$ وقتی‌که $x\to1^-$ یعنی:

$$\lim_{x\to1^-}F(x)=?$$

مسائل متفرقه

۱ـ کدامیك از توابع زیر یك به یك و پوششی هستند؟ بررسی کنید.

الف : $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ و $f(x)=۳^{x+۱}$

ب : $f:[-۱,۱]\to\left[\frac{-\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ و $f(x)=\mathrm{Arc}\sin x$

ج : $f:(۲,+\infty)\to\mathbb{R}$ و $f(x)=\log_{۲}(x-۲)$

د : $f:\mathbb{R}-\{۱\}\to\mathbb{R}-\{۲\}$ و $f(x)=\frac{۲x+۳}{x-۱}$

۲ـ تابع $y=\sin(\log_{۲}\log_{۳}x)$ را داریم ، الف : دامنه و برد آن را تعیین کنید، ب : تحقیق کنید که آیا f در دامنه‌اش یك به یك است ؟

۳ـ تابع $f(x)=\sqrt{۱+x+۲\sqrt{۱+x}}$ مفروض‌است، الف: دامنه و بردآن را بدست آورید، ب: نشان دهید در دامنه‌اش وارون‌پذیر است و ضابطه وارون‌آن را بدست‌آورید.
(امتحان نهایی چهارم ریاضی فیزیك سراسر کشور خرداد ۱۳۶۳).

۴ـ تابع $y=\mathrm{Arc}\sin\frac{۲x}{۱-x^{۲}}$ مفروض است. الف: دامنه و بردآن را بدست آورید.
ب: تابع در چه فواصلی وارون‌پذیر است وسپس ضابطهٔ وارون آنرا در هریك از فواصل بدست آورید.

۵ـ توابع $f=\{(۲,۲),(۳,۴),(۴,۵)\}$ و $g=\{(۳,۴),(۵,۶),(۲,۳)\}$ مفروضند عبارات زیر را محاسبه‌کنید:

الف : $f+g$

ب : f/g

ج : fog

د : $۳f\cdot g$

هـ : $۵f+۳g$

و : $۴f/(۲g+۱)$

ز : gof

ح : $۱/۵f$

۶ـ بدون استفاده از قاعده هوپیتال حدود زیر را بدست آورید:

الف : $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\sqrt{\cos x}}{x^{۲}}$

ب : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)}{\operatorname{tg}x-۱}$

ج : $\lim\limits_{x\to ۱^{-}}\frac{۱-x^{۲}}{(\mathrm{Arc}\cos x)^{۲}}$

د : $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}a}$

هـ : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sqrt{۱+\cos ۲x}}{\sqrt{\pi}-\sqrt{۲x}}$

۷ـ حدود زیررا محاسبه کنید :

الف: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n}}}{۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\cdots+\frac{۱}{۳^{n}}}$

ب: $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{۱-\cos(۱-\cos x)}{x^{۴}}$

ج : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$ — د : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$

ه : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ — و : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+tg\,x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

۸ــ با استفاده از تعریف حد درستی تساویهای زیر را بررسی کنید:

الف : $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$ — ب : $\lim\limits_{x\to -5} |x-3|=8$

ج : $\lim\limits_{x\to 3} (x^2-2x)=3$

۹ــ پیوستگی توابع زیر را در فاصلهٔ $(3\,,2]$ بررسی کنید.

الف : $f(x)=(-1)^{[x]}(x-[x])$ — ب : $f(x)=(-1)^{[x]}$

ج : $f(x)=[x^2+1]$ — د : $f(x)=(-1)^{[x^2]}$

ه : $f(x)=4[x]+3[-x]$ — و : $f(x)=\dfrac{x}{[x]}+1$

۱۰ــ پیوستگی توابع زیر را در $x_0=0$ بررسی کنید:

الف : $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

ب : $g(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

ج : $h(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

د : $t(x)=\begin{cases} \cos(\sin x) & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$

۱۱ــ فرض کنید f بصورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x)=\begin{cases} |x-[x]| & \text{زوج باشد } [x]\\ |x-[x+1]| & \text{فرد باشد } [x]\end{cases}$$

نمودار f را رسم کنید. تابع f در چه مقادیری از x ناپیوسته است.

۱۲ــ تابع f بصورت زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2nx}{1-nx}$$

نمودار f را رسم کنید. تابع f در چه مقادیری از x ناپیوسته است.

۱۳ــ پیوستگی هر یك از توابع زیر را بررسی کنید:

$$(1)\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n+1}\qquad (x\geqslant 0)$$

$$(2)\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\cos^{2n}x$$

۱۴ــ در پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x^2\geqslant 2|x|\\ 2|x| & x^2<2|x|\end{cases}$ بحث کنید و نمودار f را رسم کنید.

۱۵ــ با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید حدهای زیر موجود نمی‌باشد.

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

$$(2)\quad \lim_{x\to\infty}\sin x$$

۱۶ــ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4}=-\infty$$

۱۷ــ ثابت کنید هرگاه $a>1$،

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0$$

۱۸ــ تابع f بصورت زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x<0\\[2ex] \sin\dfrac{1}{x} & x>0\end{cases}$$

آیا تابع فوق در $x=0$ حد دارد؟ در $x=\frac{1}{\pi}$ چطور؟ $\lim_{x\to 0^-}f(x)$ و $\lim_{x\to 0^+}f(x)$ را در صورت وجود تعیین کنید.

۱۹ــ تابع $f(x)=\frac{[x]}{x}$ $(x\neq 0)$ مفروض است. حد تابع را در $x=0$ بررسی کنید.

۲۰ـ اگر f در نقطهٔ $x=a$ پیوسته باشد ثابت کنید $|f|$ نیز در $x=a$ پیوسته است. آیا عکس این مطلب صحیح است.

۲۱ـ با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{x}$ وجود ندارد.

۲۲ـ تابع $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ مفروض است. حد تابع‌را در $x=0$ بررسی کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

۲۳ـ نقاط ناپیوستگی تابع $g(x)=[\sqrt{1-x^2}]$ را تعیین کرده و نمودار آنرا رسم کنید.

۲۴ـ مثالی از دو تابع بیاورید که هردو در $x=a$ ناپیوسته باشند ولیکن مجموع آنها در a پیوسته باشد.

۲۵ـ مثالی از دو تابع بیاورید که یکی در a پیوسته و دیگری در a ناپیوسته ولیکن حاصلضرب دو تابع در a پیوسته باشد.

۲۶ـ تابع f بصورت زیر تعریف شده است:

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (a \leqslant x < b) \\ h(x) & (b \leqslant x \leqslant c) \end{cases}$$

اگر g روی $[a, b)$ و h روی $[b, c]$ پیوسته باشد آیا می‌توان نتیجه‌گرفت که f روی $[a, c]$ پیوسته است؟ اگر این حکم درست نیست مثال نقض بنویسید. سپس شرط یا شرایطی اضافه کنید تا پیوستگی f روی $[a, c]$ تضمین شود.

۲۷ـ با استفاده از تعریف حد، نشان دهید:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{[x^2]-[x]^2}{x^2-1}=0$$

۲۸ـ اگر $f(x)=[1-x^2]$ $(-2 \leqslant x \leqslant 2)$ نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ وجود دارد؟ آیا f در $x=0$ ناپیوسته است؟

۲۹ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$(1)\quad \lim_{x\to 2^+} \sqrt{x^2-4}=0$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 2} \left|\frac{x+3}{x-2}\right|=+\infty$$

۳۰ـ تابع، $f: R \to R$ (R قلمرو f است) و f در $x=0$ پیوسته است اگر به ازای هر $a,b\in R$، $f(a+b)=f(a)\cdot f(b)$، ثابت کنید f در R پیوسته است.

۳۱ـ اگر $f: R\to R$ (R قلمرو f است) و f در $x=0$ پیوسته باشد. اگر به ازای هر

a و b، $f(a+b)=f(a)+f(b)$، آنگاه f در هر عدد پیوسته است.

۳۲ـ مشتق توابع زیر را در نقطهٔ $x_0=0$ بدست آورید:

۱) $f(x)=\cos(\sin x)$

۲) $f(x)=\sin x$

۳) $f(x)=1-\sqrt[3]{1-x}$

۴) $f(x)=\tan x$

۳۳ـ اگر توابع f و g در عدد x_1 مشتق‌پذیر باشند آیا تابع مرکب fog الزاماً در x_1 مشتق‌پذیر است؟ اگر جوابتان مثبت است، آنرا ثابت کنید و اگر جوابتان منفی است مثال ناقضی بیاورید.

۳۴ـ فرض کنید $f(x)=3x+|x|$، $g(x)=\frac{3x}{4}-\frac{|x|}{4}$ ثابت کنید $f'(0)$ و $g'(0)$ هیچکدام وجود ندارند در حالیکه $(fog)'(0)$ وجود دارد.

۳۵ـ مثالی از دو تابع f و g بزنید که f در $g(0)$ مشتق‌پذیر باشد و g در ۰ مشتق‌پذیر نباشد و fog در ۰ مشتق‌پذیر باشد.

۳۶ـ مثالی از دو تابع f و g بزنید که f در $g(0)$ مشتق‌پذیر نباشد ولی g و fog در ۰ مشتق‌پذیر باشند.

۳۷ـ ثابت کنید اگر f در a مشتق‌پذیر باشد آنگاه:

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$$

سپس با استفاده از تابع $f(x)=|x|$ نشان دهید که حد فوق ممکن است وجود داشته باشد حتی اگر $f'(a)$ موجود نباشد.

۳۸ـ اگر $f'(x_1)$ وجود داشته باشد، ثابت کنید:

$$\lim_{x\to x_1}\frac{xf(x_1)-x_1f(x)}{x-x_1}=f(x_1)-x_1f'(x_1)$$

۳۹ـ فرض کنید f و g دو تابع باشند که قلمرو آنها مجموعهٔ همه اعداد حقیقی است بعلاوه فرض کنید:

(۱) $g(x)=xf(x)+1$

(۲) $\forall a, b \quad g(a+b)=g(a)\cdot g(b)$

(۳) $\lim_{x\to 0} f(x)=1$

ثابت کنید $g'(x)=g(x)$.

۴۰ـ اگر $g(x)=|f(x)|$ و $f^{(n)}(x)$ وجود داشته باشد و $f(x)\neq ۰$ ثابت‌کنید،

$$g^{(n)}(x)=\frac{f(x)}{|f(x)|}\,f^{(n)}(x)$$

۴۱ـ ثابت کنید:

$$\int_{۰}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{۱}{۲}\right)x}{\sin\frac{۱}{۲}x}\,dx=\pi$$

۴۲ـ ثابت‌کنید اگر $f(x)=x^n$، آنگاه:

$$f(۱)+\frac{f'(۱)}{۱!}+\frac{f^{(۲)}(۱)}{۲!}+\dots+\frac{f^{(n)}(۱)}{n!}=۲^n$$

۴۳ـ نشان دهید توابع:

$$f(x)=x^۲-x+۱\quad\left(x\geqslant\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\varphi(x)=\frac{۱}{۲}+\sqrt{x-\frac{۳}{۴}}$$

معکوس یکدیگرند و سپس معادلهٔ:

$$x^۲-x+۱=\frac{۱}{۲}+\sqrt{x-\frac{۳}{۴}}$$

را حل کنید.

۴۴ـ مشتق‌پذیری تابع $y=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}$ را بررسی کنید.

۴۵ـ برای هر یك از توابع زیر، $y^{(n)}$ را تعیین‌کنید.

$$(۱)\quad y=\frac{۲x+۱}{x^۲+x-۲}$$

$$(۲)\quad y=\frac{x}{x^۲-۱}$$

۴۶ـ اگر $x>۰$ ثابت‌کنید:

$$x-\frac{x^۳}{۶}<\sin x<x$$

۴۷ـ اکستریمم توابع زیر را در $x=۰$ بررسی کنید:

$$(۱)\quad f(x)=\sin x-x$$

$$(۲)\quad f(x)=\sin x-x+\frac{x^۳}{۳!}$$

۴۸ـ تعیین‌کنید در چه فواصلی منحنی تابع دارای تحدب یا تقعر است، نقطهٔ عطف را نیز

تعیین کنید:

$$(۱)\quad y=۴\sqrt{(x-۱)^{۵}}+۲۰\sqrt{(x-۱)^{۳}} \qquad (x\geqslant ۱)$$

$$(۲)\quad y=۲-|x^{۵}-۱|$$

۴۹ـ پیوستگی و مشتق‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و نمودارآنها را رسم کنید:

$$(۱)\quad y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+۱}$$

$$(۲)\quad y=arcsin\frac{۱-x^{۲}}{۱+x^{۲}}$$

۵۰ـ تابع

$$f(x)=\begin{cases}\left(۲-sin\,\frac{۱}{x}\right)|x| & (x\neq ۰)\\ ۰ & (x=۰)\end{cases}$$

بر R پیوسته است.

ثابت کنید f در $x=۰$ دارای مینیموم است.

۵۱ـ اگر $a<b$ انتگرال زیر را تعیین کنید:

$$\int_a^b \frac{|x|}{x}dx$$

۵۲ـ اگر $k\in Z$، ثابت کنید:

$$\int_۰^{\pi} \frac{sin۲kx}{sinx}dx=۰$$

۵۳ـ ثابت کنید:

$$\int_۰^{\frac{۵}{۴}\pi} \frac{sin۲x}{sin^{۴}x+cos^{۴}x}dx=\frac{\pi}{۴}$$

۵۴ـ ثابت کنید:

$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} sin^{m}xdx=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} cos^{m}xdx$$

سپس با استفاده از این، انتگرالهای زیر را تعیین کنید:

$$A=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} cos^{۲}xdx \qquad B=\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} sin^{۲}xdx$$

۵۵ـ مشتقات y نسبت به x را در هریك از توابع زیر بدست آورید:

۱) $۲x^۳-۳xy+۴y^۲+۲y=۰$

۲) $۳x^۴+۷xy^۲+۵x=۰$

۳) $۱۲x^۳+۷y=x^۲y-y^۳$

۴) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \qquad (a>۰)$

۵) $x^۳+y^۳=۵xy$

۶) $۳x^۲+۴xy+۵y^۲+۲x+۳y=۴$

۷) $۷x^۳+۵y^۲+۲x^۳y^۲=۰$

۸) $\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{y}=\sqrt[۳]{a}$

۵۶ـ نمودار توابع زیر را در فاصلهٔ $[-۲\ ,\ ۲]$ رسم کنید:

۱) $y=x|x|-[x]$

۲) $y=x[x]-|x|$

۳) $\frac{y}{[x]+۴}=|x|$

۴) $y=۳[x]+x^۲[x^۲]$

۵۷ـ دوره تناوب توابع زیر را بدست آورید:

۱) $y=\cos(\sin x)$

۲) $y=[x]+\sin\pi x-x$

۳) $y=\sqrt{\sin x}$

۴) $y=\sin^۴ ۳x$

۵) $y=\frac{۲\sin x-۳\cos x}{۴\cos x}$

۶) $y=\cot g ۲x-tg ۲x$

۷) $y=\sin x+x$

۸) $y=\cos x \sin ۳x$

۹) $y=|\sin x|$

۱۰) $y=tg\frac{۱}{x}+\cos\sqrt[۳]{x}$

۵۸ـ تابع $y=\frac{x}{x^۲-۳x+۲}$ مفروض است، نقاط $M_۱$ و $M_۲$ را بترتیب به طولهای $x_۱$ و $x_۲$ $(x_۱-x_۲\neq ۰)$ بر روی منحنی فرض می‌کنیم، الف: نمودار وجدول تغییرات را رسم کنید، ب: اگر $M_۱$ و $M_۲$ و O مبدأ مختصات بر یک استقامت باشند ثابت کنید $x_۱+x_۲=۳$ و از آنجا مختصات نقطه A نقطه تماس خط مماس بر منحنی را بدست آورید، پ: اگر $M_۲$ و $M_۱$ به‌موازات محور طولها و غیرمنطبق برآن فرض شود ثابت کنید $x_۱x_۲=۲$ و سپس از آنجا نتیجه بگیرید مثلث $OM_۱M_۲$ نمی‌تواند در رأس O قائمه باشد.

(کنکور تشریحی فنی مهندسی ۱۳۶۱)

۵۹ـ اولاً در تعداد و علامت ریشه‌های معادله زیر بحث کنید و ثانیاً m را طوری محاسبه کنید که دارای ریشه مضاعف باشد.

$$x^۳+mx^۲+۲=۰$$

۶۰ـ چه رابطه‌ای بین ضرایب برقرار باشد تا معادله زیر دارای ریشه مضاعف باشد؟

$$ax^3+bx^2+2=0$$

۶۱ـ اگر یکی از ریشه‌های $ax^3+bx^2+cx+d=0$ برابر مجموع دو ریشه دیگر باشد ثابت کنید:

$$b^3=4a(bc-2ad)$$

۶۲ـ اگر ریشه‌های $x^3+ax^2+bx+c=0$ به تصاعد حسابی باشد ثابت کنید:

$$2a^3-9ab+27c=0$$

۶۳ـ اگر بین a و b و c که مخالف یکدیگرند سه رابطه زیر برقرار باشد ثابت کنید $a+b+c=0$.

$$\begin{cases} a^3+pa+q=0 \\ b^3+pb+q=0 \\ c^3+pc+q=0 \end{cases}$$

۶۴ـ اگر a و b و c ریشه‌های $x^3+px+q=0$ باشد معادله درجه سومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش a^3+c^3 و b^3+c^3 و a^3+b^3 باشد.

۶۵ـ اگر ریشه‌های معادله زیر تشکیل تصاعد حسابی دهند مقدار k را محاسبه کنید:

$$x^3-3kx^2+k^2x+27=0$$

۶۶ـ اگر ریشه‌های معادله زیر تشکیل تصاعد هندسی دهند معادله زیر را حل کنید:

$$x^3-7x^2+14x-8=0$$

۶۷ـ اگر a و b و c ریشه‌های معادله $x^3-5x^2+6x-1=0$ باشد معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش $(a-2)^2$ و $(b-2)^2$ و $(c-2)^2$ باشد.

۶۸ـ مقدار تقریبی $\sin(60° \text{ و } 3')$ و نیز $\sin(60° \text{ و } 18')$ را بدست آورید.

۶۹ـ با استفاده از دیفرانسیل نشان دهید $\mathrm{Arc\,cotg}\,(0/99)\simeq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{200}$ است.

(امتحان نهایی خرداد ۱۳۶۲)

۷۰ـ با استفاده از دیفرانسیل ثابت کنید:

$$\sqrt{a^2+b}\simeq a+\frac{b}{2a} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{a^3+b}\simeq a+\frac{b}{3a^2}$$

۷۱ـ محاسبه کنید:

$$\int \frac{\sin 2x\,dx}{(1+\cos^2 x)^n} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$$

$$\int \frac{(2ax+b)\,dx}{\sqrt[n]{ax^2+bx+c}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$$

۷۲ـ انتگرال $I = \int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ را محاسبه کنید.

(راهنمایی، از $\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x}$ استفاده کنید) (کنکور تشریحی فنی مهندسی ۱۳۶۱)

۷۳ـ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

الف: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$ ب: $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$

۷۴ـ اولا در تابع $y=\frac{ax^3+b}{x^2}$ ضرایب a و b را طوری تعیین کنید که نقطه(۲و۳)M نقطه می‌نیمم باشد، ثانیاً جدول تغییرات $y=\frac{x^3+4}{x^2}$ را رسم کنید و منحنی (C) نمایش هندسی آن را رسم کنید، ثالثاً در عده نقاط تلاقی و علامت طولهای نقاط تلاقی خط D به معادله $y=m(x+1)-1$ بامنحنی (C) برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید، رابعاً x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های $(m-1)x^3+(m-1)x^2-4=0$ باشد m را طوری محاسبه کنید که داشته‌باشیم $x_1^2(1+x_1)+x_2^2(1+x_2)+x_3^2(1+x_3)=\frac{1}{3}$، خامساً مساحت سطح محصور بین منحنی (C) وخطوط $y=x$ و $x=2$ و $x=\lambda>2$ را حساب و حد این مساحت را وقتی $\lambda \to +\infty$ بدست آورید.

(امتحان نهایی چهارم ریاضی فیزیک سراسر کشور درخرداد ماه ۱۳۶۳)

۷۵ـ توابع $y=\pm x\sqrt{a^2-x^2}$ مفروض‌اند، الف: جدول و منحنی نمایش تغییرات آنها را رسم کنید، ب: a را طوری تعیین کنید که نسبت حجم دوار حادث از دوران سطح منحنی فوق حول محور طولها در فاصله $x=0$ و $x=a$ به سطح محصور بین منحنی و محور طولها درهمین فاصله برابر $\frac{8\pi}{5}$ شود.

۷۶ـ اولاً ثابت کنید $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{3}x}{\cos^{3}x+\sin^{3}x}dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{3}x}{\sin^{3}x+\cos^{3}x}dx$ و ثانیاً با استفاده ازفرض اولاً انتگرال مقابل را محاسبه کنید $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{3}x}{\sin^{3}x+\cos^{3}x}dx$.

(کنکور تشریحی فنی مهندسی ۱۳۶۳)

۷۷ـ محاسبه کنید:

الف: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

ب: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$

مجموعهٔ سؤالات امتحان نهایی جبر و آنالیز

استان خراسان خرداد ماه ۱۳۵۷

«مدت ۲/۵ ساعت»

۱ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x+۲}{x^۲+۴} = \frac{۱}{۲}$$ (۱/۲۵ نمره)

۲ـ حد زیر را محاسبه کنید

$$\lim_{x \to ۰} \frac{x^۳ \sin \frac{۱}{x}}{۱-\cos x}$$ (۱ نمره)

۳ـ تابع f بوسیله ضابطه زیر داده شده است

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^۲+۵}+\dfrac{\sqrt{(x-۲)^۲}}{x-۲} & x\neq ۲ \\ f(۲)=۴ \end{cases}$$

ثابت کنید این تابع در نقطه $x_۰=۲$ ناپیوسته است. آیا در نقطه مزبور پیوستگی راست یا چپ دارد؟ (۱ نمره)

۴ـ اگر $f(x)=\dfrac{۲x}{۱+x^۲}$ و $g(x)=tg\,۲x$ باشد. اولا حوزهٔ مقادیر $f(x)$ را تعیین کنید ثانیاً مشتق fog را به هر طریق که میتوانید محاسبه کنید. (۱ نمره)

۵ـ ثابت کنید تابع $y=\sqrt{x^۲-x^۴}$ درمبدأ مختصات می‌نیمم است ولی در این نقطه مشتق ندارد. (۱ نمره)

۶ـ اولا تحقیق کنید تابع $y=۴\sqrt{x}-x$ وقتی x درفاصله $[۰ \text{ و } ۴]$ تغییر می‌کند دارای تابع معکوس است و ضابطه تابع معکوس آنرا بدست آورید و دامنهٔ تعریف وحوزهٔ مقادیر تابع معکوس را تعیین کنید. (۱/۲۵ نمره)

۷ـ تابع $y=\dfrac{x^۲+۳}{ax+b}$ مفروض است $(a\neq ۰)$

الف ـ تحقیق کنید این تابع همواره دارای یك ماکزیمم ومی‌نیمم است (۱ نمره)

ب ـ دو پارامتر a و b را چنان تعیین کنید که $M(۱, ۲)$ یکی از دو نقطه ماکزیمم یا می‌نیمم منحنی تابع فوق باشد.
(۱ نمره)

ج ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^۲+۳}{x+۱}$ را رسم کنید.

(۳/۵ نمره)

۸ـ اولا جدول و منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=x\sqrt{۲-x^۲}$ را رسم کنید.

(۳ نمره)

ثانیاً سطح محصور بین منحنی (C) و محور xها و دو خط $x=۰$ و $x=۱$ را محاسبه کنید.
(۱/۵ نمره)

۹ـ اولا در تعداد ریشه‌های معادله درجه سوم $x^۳-۳x+۲m=۰$ برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید.

ثانیاً اگر $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ ریشه‌های معادله فوق باشند m را طوری تعیین کنید که داشته باشیم.

$$\frac{۱}{x_۱}+\frac{۱}{x_۲}+\frac{۱}{x_۳}=۳$$

(۱/۵ نمره)

۱۰ـ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$\int\frac{(x^۲+۴x)dx}{(x+۲)^۴} \quad \text{و} \quad \int\frac{\sqrt{۱+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

(۲ نمره)

استان آذربایجان شرقی خرداد ماه ۱۳۵۷

«مدت ۲/۵ ساعت»

۱- a را طوری تعیین کنید تا بین y_1 و y_2 عرض‌های نقاط ماکزیمم ومینیمم منحنی (c) بمعادلهٔ $y=\frac{x^2+1}{x+a}$ رابطهٔ $y_1+y_2=y_1y_2$ برقرار باشد. نمره (۲)

۲- جدول ومنحنی نمایش‌تغییرات تابع $y=\frac{x^2+2x+1}{x^2}$ را رسم کنید. نمره (۲/۵)

۳- معادلهٔ درجه سوم $x^3-3x+m=0$ مفروض است:

اولا - حدود m را طوری پیداکنید تا معادله سه ریشه ساده داشته باشد. نمره (۱)

ثانیاً - مقدار m را چنان بدست آورید تا بین x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله رابطه زیر برقرار باشد. $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6x_1x_2x_3$ نمره (۱/۵)

۴- اولا جدول ومنحنی نمایش‌تغییرات تابع $y=2\sqrt{x}-x$ را رسم کنید. نمره (۲/۵)

ثانیاً - مساحت سطح محصور بین منحنی و محـور طول‌ها و دو خط بمعادلات $x=0$ و $x=1$ را پیداکنید. نمره (۲)

۵- انتگرال نامعین زیر را حساب کنید. نمره (۲)

$$I=\int\frac{3x\,dx}{\sqrt{x+2}}$$

۶- جدول ومنحنی‌نمایش تغییرات تابع $y=\frac{1+\sin x}{\sin x}$ را در فاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ رسم کنید. نمره (۲/۵)

۷- با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x+2}=1$$ نمره (۲)

۸- تابعی باضابطهٔ زیرمفروض است به‌چه دلیل این تابع درنقطه $x=0$ ناپیوسته است. آیا این تابع در همین نقطه پیوستگی چپ یا راست دارد یا نه؟ چرا؟ نمره(۲)

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x^2}}{x} \quad \text{و} \quad x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

استان کرمانشاه شهریور ماه ۱۳۵۷

«مدت ۲/۵ ساعت»

مسئله اول: پیوستگی تابع:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x+3)\sqrt{(x-2)^2}}{(2x+3)(x-2)} & x\neq 2 \\ f(2)=\dfrac{5}{7} \end{cases}$$

را درنقطهٔ $x_0=2$ بررسی کنید.

۱ نمره

مسئله دوم: بطریق استلزام منطقی ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{(x-2)^2}=+\infty$ است.

۱/۵ نمره

مسئله سوم: تابع $y_1=x+\sqrt{x^2+4x}$ مفروض است دامنهٔ تعریف و حوزهٔ مقادیر آنرا تعیین وسپس ثابت کنید که ضابطهٔ معکوس آن بصورت $y_2=\dfrac{x^2}{2x+4}$ میباشد.

۱/۵ نمره

مسئله چهارم: تابع $y=\dfrac{ax^2+2x+b}{x^2-4}$ مفروض است: اولا ـ a و b را چنان تعیین کنیدکه نقطهٔ $m\Big|_{0}^{-1}$ نقطه ماکزیمم یامی‌نیمم تابع فوق‌باشد.

۱ نمره

ثانیاً ـ جدول تغییرات ومنحنی تابع $y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2-4}$ را رسم کنید.

۲/۵ نمره

مسئله پنجم: معادلات مجانبهای منحنی تابع $y=1+x\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ راتعیین کنید.

۱/۵ نمره

مسئله ششم: دیفرانسیل توابع زیر را حساب کنید. الف: $d[tg^4\sqrt[3]{x}-\cos^4\dfrac{1}{x}]=?$

۰/۵ نمره

ب : $d[\arcsin\sqrt{1-x^2}+\text{arccotg}\,\frac{x}{2}]=?$

۰/۵ نمره

مسئله هفتم : سطح محصور بین منحنی تابع $y=3x^2+\frac{2}{x^2}+5$ و محور x ها و خطوط $x=1$ و $x=-1$ را بدست آورید.

۱/۵ نمره

مسئله هشتم: در معادلهٔ درجه سوم $x^3-2x^2+m+1=0$ حدود m را چنان بیابید که معادله دارای سه ریشهٔ حقیقی باشد.

۱/۵ نمره

مسئله نهم: جدول تغییرات و منحنی تابع $y=\sin x(1-\cos x)$ را درفاصلهٔ $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۳ نمره

مسئله دهم: اولا ـ جدول تغییرات و منحنی تابع $y=(x-2)\sqrt{4-x^2}$ را رسم کنید.

۲/۵ نمره

ثانیاً ـ حجم حادث از دوران منحنی تابع فوق حول محور xها و خطوط $x=-2$ و $x=2$ را بدست آورید.

۱/۵ نمره

«مدت ۲/۵ ساعت»

استان اصفهان خرداد ۱۳۵۹

۱ــ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}} \frac{9x^2-1}{3x-1} = 2$ ۱/۵ نمره

۲ــ تابع f با دستور زیرمشخص شده پیوستگی آنرا درنقطه $x_0 = 1$ بررسی و نمودار آنرا رسم کنید اگر $x \neq 1$ باشد:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{(x+2)\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

اگر $x = 1$ باشد: ۲/۵ نمره

۳ــ معادلات خطوط مجانب هریك از توابع زیر را تعیین کنید.

$$y = \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{x+1} \quad \text{و} \quad y = \frac{2x^3-5x^2}{x^2-1}$$

۲/۵ نمره

۴ــ تابع $y = \dfrac{ax^2+bx+2}{x-1}$ مفروض است: اولا a و b را چنان تعیین کنید تا عرضهای ماکزیمم و می‌نیمم منحنی تابع فوق برابر با ۲ــ و ۲ باشد. ۱/۵ نمره

ثانیاً جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع: $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ را رسم کنید. ۲/۵ نمره

۵ــ جدول تغییرات ومنحنی نمایش توابع: $y = \pm x\sqrt{4-x^2}$ را رسم کنید.

(جدول یکی از دو تابع کافی است) ۲/۵ نمره

۶ــ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$I_2 = \int \frac{(x^2+2x)dx}{(x+1)^2} \quad \text{و} \quad I_1 = \int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt[5]{ax^2+bx+c}}$$

۲ نمره

۷ــ اولا جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع: $y = \dfrac{2\sin x - 1}{\cos^2 x}$ را درفاصله $[0 \text{ و } 2\pi]$ رسم کنید (۲/۵ نمره) ثانیاً مساحت سطح محصور بین منحنی فوق و محور طولها و خطوط $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{6}$ را حساب کنید. ۱/۵ نمره

۸ــ درتابع: $y = \dfrac{x^2+q}{px^2-(q+3)x+q}$ پارامترهای p و q را چنان بیابید تا به‌ازاء $x = \frac{1}{2}$ تابع برابر $(+\infty)$ شود. ۱ نمره

امتحان آذربایجان شرقی خرداد ۱۳۵۹

«مدت ۲/۵ ساعت»

«از سؤالات ۱ تا ۵ فقط به سه‌سؤال اختیاری پاسخ دهید ـ سؤالهای ۶ و ۷ را تماماً بنویسید»

۱ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که: $\lim_{x \to ۲} \left(\frac{۷x-۱۱}{۳}\right) = ۱$ حد است.

۲ـ تابعی با ضابطهٔ $f(x) = ۲x - \frac{\sqrt{x^۲-۲x+۱}}{x-۱}$ و $f(۱) = ۱$ داده شده است ثابت کنید که تابع f در نقطه $x_۰ = ۱$ ناپیوسته است. آیا پیوستگی راست یا چپ دارد؟

۳ـ منحنی $y = \frac{(x+۲)^۲}{x^۲-۱}$ را با خطوط موازی محور ox قطع داده‌ایم وقتیکه این خطوط تغییر کند مکان هندسی اوساط نقاط تلاقی را پیدا کنید.

۴ـ تابع $y = \frac{x^۲+۲ax+a+۲}{x^۲-۱}$ مفروض است مطلوبست محاسبه پارامتر a بطوریکه بین $y_۱$ و $y_۲$ عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم منحنی آن رابطه $y_۱ + y_۲ + ۳ = y_۱ y_۲$ برقرار باشد.

۵ـ حد تابع $y = \sqrt{x^۲+۳x} - \sqrt{x^۲+۹}$ را وقتیکه $x \to \pm\infty$ حساب کنید.

هر سؤال ۲ نمره

۶ـ تابع اولیه نامعین زیر را حساب کنید $(x > ۲)$ (۳ نمره)

$$S = \int \frac{۳(x+۳)dx}{\sqrt{x-۲}}$$

۷ـ جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع‌های زیر را رسم کنید:

$$y = \frac{(x+۲)^۲}{x^۲-۱}$$ (۳/۵ نمره)

$$y = ۲ \pm \sqrt{x^۲-۲x+۵}$$ (۴ نمره)

$$y = \sin x + \cos x - ۱ \qquad (۰ \leqslant x \leqslant ۲\pi)$$ (۳/۵ نمره)

استان آذربایجان غربی خرداد ماه ۵۹ «مدت ۲/۵ ساعت»

۱ـ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2}$ ، ($x\neq 0$) داده‌شده با استفاده از تعریف، حد تابع و تعیین یك استلزام منطقی ثابت کنید اگر x بسمت ($+\infty$) میل کند، $f(x)$ بسمت (۲) میل مینماید. (۱/۵ نمره)

۲ـ در تابع f که $[x]$ قسمت صحیح x ، را نمایش میدهد با ضابطهٔ زیر داده شده: ضرایب a و b را چنان تعیین کنید وقتیکه x بسمت (۲) میل میکند تابع پیوستگی داشته و حد چپ آن برابر (۳) باشد. (۲ نمره)

$$f(x)=\begin{cases}[x]+a : x>2 & \text{اگر}\\ 4 \quad : x=2 & \text{اگر}\\ [x]+bx: x<2 & \text{اگر}\end{cases}$$

۳ـ حد تابع: $y=\frac{\cos 2x+\cos x-2}{x^2}$، را وقتیکه x بسمت(صفر)میل میکند، پیدا کنید. (۲/۵ نمره)

۴ـ تابع f با ضابطهٔ: $\left(f(x)=\frac{x^3+2}{x}\text{ و } x\geqslant 1\right)$ داده شده ، اولا ثابت کنید تابع f در دامنهٔ تعریفش معکوس پذیر است، ثانیاً اگر معکوس تابع $f(x)$ را با $f^{-1}(x)$ ، نمایش دهیم مطلوبست معادلهٔ خط مماس برمنحنی نمایش تابع $f^{-1}(x)$ درنقطه‌ای بعرض(۲) واقع برآن. (۳ نمره)

۵ـ تابع: $y=\frac{ax^2+bx+c}{x-1}$ ، مفروض است:

I ـ ضرایب a و b و c ، را چنان معین کنید که خط $y=x-2$، مجانب مایل منحنی نمایش این تابع بوده و مینیمم تابع برابر (۱) باشد. (۲ نمره)

II ـ جدول وتغییرات منحنی (λ) منحنی نمایش تابع، $y=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$،رارسم کنید (۲/۵ نمره)

III ـ اگر خط $y=m$ ، منحنی (λ) را درنقاط A و B و محورعرضی را درنقطه e قطع کندطول نقطهٔ D مزدوج توافقی (e) را نسبت بدونقطه A و B ، پیدا کنید. (۱ نمره)

۶ـ اولا، جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع: $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$، را رسم کنید.(۳/۵ نمره)

ثانیاً انتگرال معین زیر را محاسبه کنید.

$$I=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

(۲ نمره)

استان سمنان خرداد ماه ۱۳۵۹

«مدت ۲/۵ ساعت»

۱ـ مطلوب است محاسبه $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$ حد (بهر روشی که میدانید) (۱/۵ نمره)

۲ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x) = -2$ حد (۲ نمره)

۳ـ دیفرانسیل تابع $y = Arctg\sqrt{x} + Arcsin\, 2x$ را بدست آورید. (۱/۵ نمره)

۴ـ از نقطه‌ای بطول ۲ واقع برمنحنی تابع $y = \sqrt{2x^2+1}$ مماسی رسم میکنیم معادله این مماس را بنویسید (۱/۵ نمره)

۵ـ تابع $y = \frac{ax^2+bx-5}{x+c}$ مفروض است. ضرایب a و b و c را چنان تعیین کنید تا خطوط $x=4$ و $y=2x+7$ مجانبهای منحنی این تابع باشند. (۱/۵ نمره)

۶ـ جدول تغییرات و منحنی تابع $y = \frac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$ را رسم کنید (۳ نمره)

۷ـ جدول تغییرات و منحنی تابع اصم $y = 1 + \sqrt{2x - x^2}$ را رسم کنید (۳ نمره)

۸ـ جدول تغییرات و منحنی تابع $y = \frac{\sin x}{2\sin x - 1}$ را در فاصله صفر و 2π رسم کنید (۳ نمره)

۹ـ انتگرال نامعین زیر را حساب کنید. (۱/۵ نمره)

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+5}}$$

۱۰ـ انتگرال معین زیر را حساب کنید. (۱/۵ نمره)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^2 x\, dx$$

استان زنجان خرداد ۵۹

«مدت ۲/۵ ساعت»

۱ـ از روی تعریف حد ثابت کنید: $\lim_{x\to 1}(x^2+x+5)=7$ (۲ نمره)

۲ـ تابع $y=\dfrac{x^2-4x}{x^2+ax+b}$ مفروض است اولا: a و b را طوری تعیین کنید که نقطهٔ $S\left|\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right.$ نقطهٔ می‌نیمم تابع فوق باشد (۱/۵ نمره)

ثانیاً: جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع: $y=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$ را رسم کنید.

(۳ نمره)

۳ـ جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع: $y=\sqrt{x^2-2x-3}$ را رسم کنید.

(۳ نمره)

۴ـ مشتق تابع $y=Arcsin\,2x$ را حساب کنید (۱ نمره).

۵ـ جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع: $y=cos^2x-cosx$ را در فاصله $[0 , 2\pi]$ رسم کنید (۳ نمره)

۶ـ تابع $y=\dfrac{x^2+a}{x^2+x+4}$ مفروض است اولا: بدون استفاده ازمشتق معادلهٔ درجه دومی برحسب پارامتر a تشکیل دهید که ریشه‌هایش عرضهای نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق باشد (۲ نمره) ثانیاً: a را طوری حساب کنید که عرض نقطهٔ ماکزیمم تابع فوق(۲) باشد. (۱ نمره).

۷ـ انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$\int (x^2+4)(x+1)^3dx \quad \text{و} \quad 4\int\frac{sinx}{cos^5x}dx$$

(۲ نمره) (۱/۵ نمره)

استان فارس خرداد ماه ۵۹

۱ـ تساویهای زیر را با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

الف ـ $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{-۴}{(x-۱)^۲}=-\infty$ (۱/۵ نمره)

ب ـ $\lim\limits_{x\to ۳}|۲x-۷|=۱$ (۱ نمره)

۲ـ تابع $f(x)=۴[x]+۳[-x]$ داده شده است:

اولاً ـ اگر $x\to n$ حد چپ و حد راست تابع را بدست آورید. آیا تابع دراین نقطه حد دارد؟

ثانیاً ـ پیوستگی تابع را بازاء $x_۰=n$ بررسی کنید. (۲ نمره)

(n عدد صحیح و $[x]$ بزرگترین عدد درست کوچکتر یا مساوی x میباشد)

۳ـ مطلوبست محاسبه حد زیر:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{۴x^۲+۳x+۱}-\sqrt{۴x^۲-۷x-۳}\right)$$ (۲ نمره)

۴ـ معادله خط مماس بـرمنحنی $y=Arcsinx$ را در نقطه‌ای به طول $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ بـنـویسید. (۱/۵ نمره)

۵ـ جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع $y=\frac{cos۲x}{cosx}$ را در فاصله $[۰ \text{ و } ۲\pi]$ رسم کنید. (۳/۵ نمره)

۶ـ تابع $y=\frac{ax^۲+bx+۱}{x+c}$ مفروض است

الف ـ مقادیر a و b و c را چنان تعیین کنید که منحنی تابع دارای دومجانب بمعادلات $x=۳$ و $y=x+۱$ باشد. (۱/۵ نمره)

ب ـ از نقطه o (مبدأ مختصـات) خـط غیر مشخصی رسم مـی‌کنیم تـا منحنی تـابـع $y=\frac{x^۲-۲x+۱}{x-۳}$ را در نقاط M و N قطع کند مـکان هندسی نقطه P مـزدوج تـوافقی O را نسبت به M و N بدست آورید. (۲ نمره)

۷ـ جدول تغییرات و منحنی تابع $y=۱+\sqrt{x^۲-۲x+۲}$ را رسم کنید. (۳نمره)

۸ـ سطح محصور بین منحنی تابع $f(x)=\frac{x+۳}{\sqrt{x+۹}}$ و مـحـور xها و خطوط $x=۰$ و $x=۷$ را بدست آورید. (۲نمره)

«مدت ۲/۵ ساعت»

استان کرمانشاه خرداد ماه ۵۹

مسئله اول : پیوستگی تابع

$$f(x)\begin{cases} x^۲-\dfrac{۳x\sqrt{(x-۲)^۲}}{x-۲} & \text{اگر } x\neq ۲ \\ -۲ & \text{اگر } x=۲ \end{cases}$$

را در نقطهٔ $x_\circ=۲$ بررسی کنید. ۱/۵ نمره

مسئله دوم : بکمك استلزام منطقی ثابت کنید

الف ـ حد $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۴x^۲-۹}{۲x+۳}=۱$ ۱/۵ نمره

ب ـ حد $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{۵x+۳}{۲x+۱}=\dfrac{۵}{۲}$ ۱/۵ نمره

مسئله سوم : حد تابع $y=۲x+\sqrt{۴x^۲+۳x-۵}$ راوقتی x بسمت $\pm\infty$ میل‌میکند تعیین کنید. ۱ نمره

مسئله چهارم : معادلات خطوط مماس وقائم برمنحنی تابع:

$$۲y^۲+x^۲-۲xy-۳x+۴y=\circ$$

را در نقطهٔ $A(۳ \text{ و } ۱)$ که برمنحنی واقع است بدست آورید. ۱/۵ نمره

مسئله پنجم : دیفرانسیل تابع مقابل را بدست‌آورید. $d[\cos^۴\sqrt[۴]{x}+۲tg^۴\dfrac{x}{۸}]=?$ ۱ نمره

مسئله ششم : انتگرال تابع مقابل را بدست آورید. $\displaystyle\int\frac{cotg^۳x}{\sqrt[۳]{\sin^۲x}}dx=?$ ۱/۵ نمره

مسئله هفتم : مساحت سطح محصور بین منحنی تابع $y=۳-۳x^۲$ و محور xها را بدست‌آورید (رسم شکل لازم نیست) ۱/۵ نمره

مسئله هشتم : جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع کسری $y=\dfrac{x+۲}{x^۲-x-۲}$ را رسم کنید. ۳ نمره

مسئله نهم : تابع $y=\dfrac{x^۲-۲ax+۳}{۲x-۱}$ مفروض است مقدار a را طوری بیابید که مجموع ماکزیمم و می‌نیمم تابع فوق برابر ۳ شود. ۱/۵ نمره

مسئله دهم : اولا جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع $y=x-۲\sqrt{x^۲+۱}$ را رسم کنید. ۳ نمره

ثانیاً ـ خط $y=m$ منحنی تابع فوق را در دونقطهٔ $M_۱$ و $M_۲$ قطع میکند مکان هندسی نقطهٔ P وسط $M_۱M_۲$ را تعیین کنید. ۱/۵ نمره

استان خراسان شهریور ماه ۱۳۵۹

۱ــ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید (۱/۵ نمره)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}} = ۱$$

۲ــ حد تابع زیر را محاسبه کنید (۱/۵ نمره)

$$\lim_{x \to ۰} \frac{x \sin ۲x}{\sqrt{x^{۲}+۱}-۱}$$

۳ــ تابع f بوسیله دستور زیر تعریف شده است

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & \text{اگر } x \leqslant ۲ \\ ax+b & \text{اگر } x > ۲ \end{cases}$$

ضرائب a و b را چنان تعیین کنید تا درنقطه $x_{\circ}=۲$ تابع $f(x)$ پیوسته ومشتق پذیر باشد (۲ نمره)

۴ــ تابع $y=\sqrt{\frac{۱+x}{۱-x}}$ مفروض است اولاً تحقیق کنید درچه فاصله ازدامنه تعریفش تابع فوق دارای تابع معکوس است و ضابطه تابع معکوس را بدست آورید و دامنه تعریف و برد تابع معکوس را تعیین کنید. (۱/۵ نمره)

۵ــ تابع $y=\frac{x^{۲}+bx+c}{x^{۲}+bx-۲}$ مفروض است اولا b و c را چنان بیابید که منحنی نمایش تابع از مبدأ مختصات گذشته وخط $x=\frac{-۱}{۲}$ محور تقارن منحنی باشد. (۱ نمره)

ثانیاً جدول تغییرات ومنحنی (c) نمایش تغییرات تابع $y=\frac{x^{۲}+x}{x^{۲}+x-۲}$ را رسم کنید (۳/۵ نمره)

ثالثاً اگر خط $y=m$ منحنی (c) را در دونقطه مانند A و B قطع کند معادله مکان هندسی نقطه P وسط خط AB را وقتی پارامتر m تغییر می کند تعیین کنید. (۱ نمره)

۶ــ جدول ومنحنی نمایش تغییرات تابع $y=۱+x^{۲}+\sqrt{x^{۲}-۱}$ را رسم کنید. (۴ نمره)

۷ــ انتگرالهای زیر را محاسبه کنید:

(۱) $$\int \frac{(\sqrt{x}+۱)}{\sqrt{x^{۲}+۲x\sqrt{x}}}dx$$ (۲ نمره)

(۲) $$\int \sin\frac{۲}{x}\sqrt{۱+\cos^{۲}\frac{۱}{x}} \cdot \frac{dx}{x^{۲}}$$ (۲ نمره)

استان تهران خرداد ماه ۵۹

«مدت $۲\frac{۱}{۴}$ ساعت»

۱ـ مطلوبست محاسبه: $\lim\limits_{x \to ۳} \dfrac{\sqrt{x+۱}-۲}{\sqrt{۲x+۳}-۳}$ ۲ نمره

۲ـ یکی از دوتساوی زیر را به دلخواه انتخاب‌کرده و درستی‌آنرا با استفاده از تعریف حد ثابت کنید. ۲ نمره

الف: $\lim\limits_{x \to ۱} (۳x+۵)=۸$

ب: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{۲x+۱}{x}=۲$

۳ـ معادله قائم برمنحنی نمایش $y^۲+x^۳=۹$ را در نقطه A به عرض ۱ واقع برمنحنی بدست آورید. ۲ نمره

۴ـ از سه تابع زیر دو تابع را به دلخواه اختیار نموده، جدول ومنحنی نمایش تغییرات آنها را رسم کنید. (هر کدام ۳/۵ نمره)

الف: $y=\dfrac{x^۲-۴x}{x^۲-۴x+۳}$

ب: $y=x+۳+\sqrt{-۳x^۲+۶x+۹}$

ج: $y=\dfrac{\sin x-۱}{۲\sin x+۱}$ $\quad ۰ \leqslant x \leqslant ۲\pi$

۵ـ دیفرانسیل تابع $y=\dfrac{x+۱}{\sqrt[۳]{(x+۲)^۲}}$ را حساب کنید و آنرا ساده نمائید. ۲ نمره

۶ـ انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

الف: $\displaystyle\int_{-۱}^{۲} \frac{x+۱}{\sqrt{x+۲}}dx$ ۲ نمره

ب: $\displaystyle\int \frac{-۱}{\sin^۲ x\sqrt{۱+\cot g x}}dx$ ۱/۵ نمره

ج: $\displaystyle\int (۲x+۳)\sqrt[۷]{(x^۲+۳x)^۲}\,dx$ ۱/۵ نمره

استان مازندران خردادماه ۱۳۵۹

«مدت $۲\frac{۱}{۲}$ ساعت»

مسئله اول: باکمك استلزام منطقی ثابت کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\left(x^{۲}+۱-\frac{۱}{x+۲}\right)=\frac{۵}{۳}$$ (۲ نمره)

مسئله دوم: تابع f با دستور زیر داده شده است.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲}-\dfrac{\sqrt{(x-۱)^{۲}}}{x-۱} & \text{اگر } x\neq ۱ \\ f(۱)=۲ & \text{اگر } x=۱ \end{cases}$$

پیوستگی تابع را در نقطه $x_{\circ}=۱$ بررسی کرده و نمودار آن را درصفحه مختصات قائم رسم کنید. (۳/۲۵ نمره)

مسئله سوم: ۱ـ درتابع $y=\dfrac{x^{۲}+ax+b}{x^{۲}-ax+b}$ ، a و b را طوری پیدا کنید که بازاء $x=۲$ تابع دارای ماکزیممی برابر ۹ــ باشد (۱ نمره)

۲ـ منحنی (C) نمایش تغییرات تابع $y=\dfrac{x^{۲}+۵x+۴}{x^{۲}-۵x+۴}$ را رسم کنید. (۳/۵ نمره)

۳ـ اگرخط $y=m$ منحنی را در نقاط M' و M'' و محور عرضها را درنقطه‌ای مانند P قطع کند مطلو بست مختصات نقطه M وسط $M'M''$ و نقطه P' مزدوج توافقی P نسبت به M' و M'' برحسب m و مکان هندسی این‌نقطه وقتیکه m تغییر کند. (۲/۲۵ نمره)

مسئله‌چهارم: جدول‌جهت تغییرات نمودارتابع $y=x-۱+\sqrt{x^{۲}-۲x+۳}$ رادرسم کنید. (۳/۵ نمره)

مسئلهٔ پنجم: جدول‌جهت‌تغییرات‌ونمودارتابع $y=\dfrac{۲\sin x-۱}{۲\sin x+۱}$ را درفاصلهٔ $(۰, ۲\pi)$ رسم کنید. (۳/۲۵ نمره)

مسئله ششم: انتگرال زیر را حساب کنید (۱/۲۵ نمره)

$$I=\int\frac{x^{۳}}{\sqrt{۱+x^{۲}}}dx$$

تهران ۶۰/۲/۱۹

«مدت $1\frac{3}{4}$ ساعت»

۱ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-2}{x-2} = 7 \qquad \text{(۲ نمره)}$$

۲ـ تابع $f(x)=kx^n$ وقتی $x \to 0$ هم‌ارز تابع $g(x)=x-\sin x$ است n و k را تعیین کنید. (۱/۵ نمره)

۳ـ پیوستگی تـابع $f(x)=x[x]-|x-1|$ را در فـاصله $]1 , 2[$ بررسی کنید. (۱/۵ نمره)

۴ـ هذلولی بمعادله $y=\dfrac{ax^2+b}{cx}$ مفروض است $(c\neq 0)$

a و b و c را چنان تعیین کنید که حاصلضرب طولهای نقاط ماکزیمم و مینیمم تـابع برابر -1 و قدر مطلق تفاضل ماکزیمم ومینیمم برابر عدد ۴ باشد. (۲ نمره)

سپس جـدول تغییرات و منحنی $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ را رسم کنید. (۲ نمره)

۵ـ اولا ـ مطلوبست رسم جدول ومنحنی تابع $y=x-\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$ (۲/۵ نمره)

ثانیاً ـ ثابت کنید تابع دردامنه تعریف خود معکوس پذیراست. (۱ نمره)

ثالثاً ـ معادله خط مماس برمنحنی تابع معکوس از نقطه‌ای بطول صفرواقع برمنحنی تابع معکوس را بنویسید. (۱/۵ نمره)

رابعاً ـ سطح محصوراز منحنی را با محورطول در فاصله دو خط $x=0$ و $x=3$ را تعیین کنید. (۲ نمره)

۶ـ یکی از انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int 16\sin^2 3x\cos^3 2x\,dx \quad \text{و} \quad \int \frac{(2x^2-x)dx}{x+\sqrt{x^2-x}} \qquad \text{۱/۵ نمره}$$

۷ـ جدول تغییرات ومنحنی نمایش تابع $y=\dfrac{\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}$ را درفاصله صفر و 2π رسم کنید. (۲/۵ نمره)

استان تهران خرداد ماه ۶۰

«مدت ۲/۵ ساعت»

۱ــ درستی تساوی $\lim\limits_{x \to 1} \frac{4x^2-4}{x-1} = 8$ را با استفاده از تعریف حد تحقیق نمائید.

۱ نمره

۲ــ تابع f بوسیلــه دستور
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{اگر } x>1 \\ x-1 & \text{اگر } x<1 \\ 0 & \text{اگر } x=1 \end{cases}$$
داده شده است،
پیوستگی چپ، پیوستگی راست، بطورکلی پیوستگی آنرا در نقطه‌ای بطول ۱ بررسی کنید.

۱ نمره

۳ــ بکمك قانون هوپیتال حد تابع $f(x)=\frac{tgx-x}{x-\sin x}$ را وقتی $x\to 0$ بدست آورید.

۱ نمره

۴ــ جهت تقعر و مختصات نقاط عطف تابع $y=\frac{2x}{3x^2+2}$ را تعیین وتحقیق کنید که نقاط عطف بر یك استقامت‌اند.

۲ نمره

۵ــ تابع $y=\frac{a(x^2-1)}{x^2-4}$ مفروض است.

اولا ــ تحقیق کنید نمایش هندسی تمام منحنی‌هائی که بازاء مقادیر مختلف a در تابع فوق بدست میآیند از دو نقطه ثابت A و B که مختصات آنها را تعیین میکنید میگذرند. ۱ نمره

ثانیاً ــ a را طوری تعیین کنید که مماس بر منحنی در نقطه‌ای از منحنی بطول ۱ بر خط $3x-2y+1=0$ عمود گردد.

۱ نمره

۶ــ ازسه‌تابع زیر دوتا رابه‌دلخواه انتخاب کرده، جدول تغییرات ومنحنی نمایش هندسی آنها را رسم کنید.

۷ نمره

$$I)\quad y=\frac{x^3}{x^2-4} \qquad II)\quad y=\frac{\cos x}{1-2\sin^2 x} \quad \frac{\pi}{2}\geqslant x\geqslant -\frac{\pi}{2}$$

$$III)\quad y=x+2-\sqrt{x^2-9}$$

۷ــ دروجود وعلامت ریشه‌های معادله درجه‌سوم $(2-m)x^3-3x^2+1=0$ برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید.

۲ نمره

۸- دیفرانسیل تابع $y=\frac{3x^2}{x^2+4}+Arctgx$ را حساب کنید. ۱ نمره

۹- یکی از دو انتگرال زیررا به دلخواه انتخاب کرده و آنرا محاسبه نمائید. ۱/۵ نمره

$$I)\quad \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{1+tg^2 x}}dx \quad \frac{\pi}{2}>x>-\frac{\pi}{2} \qquad II)\quad \int \frac{12x^3}{\sqrt{3+2x^2}}dx$$

۱۰- یکی از دو تمرین زیر را به دلخواه انتخاب و حل نمائید. ۱/۵ نمره

I) مساحت سطح محصور بین دو منحنی نمایش هندسی دو تابع $y=x^3+2$ و $y=2x^2-x+2$ را بدون رسم منحنی، حساب کنید.

II) سطح بین منحنی نمایش هندسی تابع $y=\sqrt{15}(x^2+1)$ و محور xها و دو خط به معادلات $x=0$ و $x=1$ را حول محور xها دوران میدهیم حجم حادث چقدراست؟

خرداد ماه ۶۳

«مدت $۲\frac{۱}{۲}$ ساعت»

۱ـ درستی تساوی $\lim_{x\to-\infty} \frac{۱-x}{x+۱} = -۱$ را با تعریف حد تحقیق کنید. ۱/۵ نمره

۲ـ اولاً ـ k را طوری تعیین کنید که تابع f باضابطه
$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^۲-۴}{x^۳-۸} & x\neq ۲ \text{ اگر} \\ \frac{۲k-۱}{۲k+۱} & x=۲ \text{ اگر} \end{cases}$$
در نقطه‌ای بطول $x_۰=۲$ پیوسته باشد. ۱ نمره

ثانیاً ـ اگر $k=۱$ فرض شود مشتق تابع فوق را در $x_۰=۲$ با تعریف مشتق حساب کنید. ۱ نمره

۳ـ مقدار $\lim_{x\to ۰} \frac{\sin^۴ x}{۴-۴\cos(۱-\cos x)}$ را حساب کنید. ۱/۵ نمره

۴ـ معکوس پذیری تابع $f(x)=\sqrt{x+۱+۲\sqrt{x+۱}}$ را در دامنه تعریفش بررسی کنید، اگر معکوس پذیراست ضابطه معکوس را بدست آورید. ۱/۵ نمره

۵ـ اولاً ـ درتابع $y=\frac{ax^۳+b}{x^۲}$، a و b را طوری تعیین کنید که $M(۳ ,۲)$ نقطه می‌نیمم آن باشد. ۱ نمره

ثانیاً ـ جدول تغییرات تابع $y=\frac{x^۳+۴}{x^۲}$ را تعیین کرده و منحنی (c) نمایش هندسی آنرا رسم کنید. ۳ نمره

ثالثاً ـ در عده نقاط تلاقی و علامت طول‌های نقاط تلاقی خط (D) به معادله $y=m(x+۱)-۱$ بامنحنی (c) برحسب مقادیر مختلف m بحث کنید. ۲ نمره

رابعاً ـ اگر $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ ریشه‌های معادله $(m-۱)x^۳+(m-۱)x^۲-۴=۰$ باشد m را طوری تعیین کنید که داشته باشیم

$$x_۱^۲(۱+x_۱)+x_۲^۲(۱+x_۲)+x_۳^۲(۱+x_۳)=\frac{۱}{۳}$$ ۱ نمره

خامساً ـ مساحت سطح محصور بین منحنی (c) وخطوط $y=x$ و $x=۲$ و $x=\lambda>۲$ را حساب کرده و حد این مساحت را وقتی $\lambda\to+\infty$ بدست آورید. ۱ نمره

۶ـ یکی از دو تابع زیر را به دلخواه انتخاب کرده، جدول تغییرات آنرا تعیین و منحنی نمودار هندسی آنرا رسم کنید. ۳ نمره

$$\mathrm{I}:\ y=\frac{\cos x-\sin x}{\operatorname{cotg} ۲x}\quad ۲\pi\geqslant\ \ x\geqslant ۰ \qquad \mathrm{II}:\ y=x-۲+۲\sqrt{x^۲+۱}$$

۷ـ اگر $\sqrt{۳}=۱/۷$ و $\pi=۳/۱۵$ فرض شود مقدار تقریبی $\operatorname{cotg} ۶۲^\circ$ را به‌کمك دیفرانسیل حساب کرده و آنرا ساده‌کنید. ۱ نمره

۸ـ یك منحنی از نقطه $A\left(۰ \text{ و } \frac{۱}{۲}\right)$ میگذرد و مشتق معادله آن بصورت:

$$y'=\frac{x^۳}{\sqrt{x^۲+۱}}+\frac{۱}{x^۲+۱}$$

میباشد، معادله آن منحنی را بدست آورید. ۱/۵ نمره

خرداد ماه ۶۴

«وقت $۲\frac{۱}{۲}$ ساعت»

۱ـ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید : $\lim\limits_{x\to ۲^-}\left(\frac{x^۲-۳x+۲}{|x-۲|}+۲\right)=۱$ ۱/۵ نمره

۲ـ در صورتیکه $f(x)=\frac{x^۲}{x-۲}$ و $(fog)(x)=۲x-$ باشد ضابطه‌های $g(x)$ را پیدا کنید.

۱/۵ نمره

۳ـ تحقیق کنید تابع $f(x)=(-۱)^{[x]}\ (x-[x])$ درفاصله $[۱\ و\ ۲]$ پیوسته است.

([x] بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x میباشد) ۱/۵ نمره

۴ـ حد تابع زیررا در نقطه داده شده بیابید . $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}(xtgx-\frac{\pi}{۲}\ Secx)$ ۱/۵ نمره

۵ـ تابع $y=\frac{ax^۲-x+۱}{x+a}$ مفروض است $(a\neq ۰)$

اولاً ـ مکان هندسی نقطه ω محل تلاقی مجانبهای منحنی تابع را وقتی‌که a تغییر می‌کند بدست‌آورید. ۱ نمره

ثانیاً ـ مقدار a را چنان تعیین‌کنید که مجموع معکوسات ماکزیمم و می‌نیمم تابع (-۲) باشد. ۱/۵ نمره

۶ـ اولاً ـجدول تغییرات و منحنی‌تابع $y=\frac{۱-۲\ cos۲x}{۱-cos۲x}$ را در فاصله $[۰\ و\ \pi]$ رسم‌کنید. ۳ نمره

ثانیاً ـ سطح محصور بین منحنی و محور x ها و دو خط $x=\frac{\pi}{۴}$ و $x=\frac{\pi}{۲}$ را حساب کنید. ۱/۵ نمره

۷ـ جدول تغییرات و منحنی یکی از دوتابع زیر را به دلخواه رسم‌کنید.

$y=۲-\sqrt{\frac{x-۲}{x+۱}}$ $\qquad$ $y=\frac{x^۳-۳x-۲}{x^۲}$ ۳ نمره

۸ـ اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^۳-۳x+۲m=۰$ باشد :

اولاً ـ مقدار m را چنان تعیین کنید‌که داشته باشیم:

$$\alpha(\alpha^{۲}+۱)+\beta(\beta^{۲}+۱)+\gamma(\gamma^{۲}+۱)=-۶$$ ۱/۲۵ نمره

ثانیاً ــ معادله درجهٔ سومی بنویسید که ریشه‌های آن $\alpha^{۳}$ و $\beta^{۳}$ و $\gamma^{۳}$ باشد

۰/۷۵ نمره

۹ــ مطلوبست محاسبه انتگرال زیر : $\int \frac{۴x^{۷}dx}{\sqrt{x^{۴}+۱}}$ ۲ نمره

خرداد ماه ۶۵

«مدت $۲\frac{۱}{۲}$ ساعت»

۱ـ ضابطهٔ تابع معکوس تابع f به‌معادله:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{۸}(۱۱-۳x) \text{ ، } x>۱\\ \\ \frac{۱}{۳}(۱۱-۸x) \text{ ، } x\leqslant ۱\end{cases}$$

را بدست‌آورید. آیا تساوی $fof^{-۱}=f^{-۱}of$ برقرار است؟ چرا؟ **۱/۵ نمره**

۲ـ تابع f با ضابطه: $f(x)=(-۱)^{[x+۱]}\left(\frac{x^۲-۴}{x^۲+۲}\right)$ مفروض است (تابع جزء صحیح با نماد [ ] نشان داده شده) بااستفاده از تعریف حد ثابت‌کنید: $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۰$

۱/۷۵ نمره

۳ـ تابع f با ضابطه: $f(x)=\begin{cases}ax^۲+bx+۲ \text{ ، } |x|\leqslant ۲\\ \sqrt{x^۲+۴x+۴} \text{ ، } |x|>۲\end{cases}$ داده شده مقادیر a و b را چنان حساب‌کنیدکه تابع f درنقطه‌ای بطول ۲+ مشتق پذیر باشد. **۲ نمره**

۴ـ معادله خط قائم برمنحنی تابع به‌معادله: $y=\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{x-۱}{x+۲}\right)$ را در نقطه تقاطع منحنی با محورعرضها بدست‌آورید. **۱/۲۵ نمره**

۵ـ تابع به‌معادله: $y=\frac{x^۲+x+a}{x^۲-۲x+b}$ مفروض است.

اولاً ـ مقادیر a و b را چنان حساب‌کنیدکه نقاط ماکزیمم و می‌نیمم تابع روی خط D به‌معادله $y=\frac{۱}{۲}(۳x-۱)$ قرار گیرند. **۱/۵ نمره**

ثانیاً ـ جدول تغییرات و منحنی نمایش تابع بـه معادله $y=\frac{x^۲+x-۱}{x^۲-۲x+۲}$ رارسم نمائید. **۳ نمره**

۶ـ فقط یکی ازدو تابع به معادلات زیررا انتخاب نموده، جدول تغییرات و منحنی نمایش آنرا رسم نمایید.

(الف) $y=x+\sqrt{x^۲-۴}$ (ب) $y=\frac{۲+\sin x}{۱-۲\sin x}$ ، $۰\leqslant x\leqslant ۲\pi$ **۳ نمره**

۷ـ اولاً : ثابت کنید تابع به معادله: $y=\frac{x^{2}}{x^{2}+x+1}$ دارای سه نقطهٔ عطف می‌باشد.
۲ نمره

ثانیاً : اگر α و β و γ ریشه‌های معادله درجه سوم : $x^{3}+3x^{2}-1=0$ باشند.
مطلوبست محاسبه: $S=(\alpha\beta)^{3}+(\beta\gamma)^{3}+(\alpha\gamma)^{3}$ ۱/۷۵ نمره

۸ـ مطلوبست محاسبه انتگرال نامعین: $I=\int\frac{x^{3}+x^{2}+x+5}{x^{2}+x+1}\,dx$ ۱/۷۵ نمره

۹ـ سطح محصور بین منحنی تابع به‌معادله: $y=\frac{1}{\cos^{2}x}$ و محورطولها ودوخط $x=0$ و $x=\frac{\pi}{3}$ را حول‌محورطولهادوران داده، اندازه‌حجم حاصل ازدوران را حساب کنید. ۱/۵ نمزه

خرداد ماه ۶۶

«مدت $۲\frac{۱}{۲}$ ساعت»

۱ـ با برقراری یك استلزام منطقی ثابت کنید: $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x+1} = -2$ ‏ ۱/۵ نمره

۲ـ مطلوب است تعیین a و b به قسمی که تابع زیردر $x=1$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+b|x| & (x<1 \text{ با شرط}) \\ [x] & (x=1 \text{ با شرط}) \\ a\sin(x-1)+b & (x>1 \text{ با شرط}) \end{cases}$$

۱/۵ نمره

۳ـ اولاً ـ مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^2-2x|$ را در نقطهٔ $x=2$ بررسی کنید.

ثانیاً ـ $f'(3)$, $f'(\frac{1}{2})$ را احساب کنید. ‏ ۲ نمره

۴ـ پارامترهای a و b را چنان تعیین کنید که عرضهای نقاط ماکزیمم و می نیمم منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^2+ax+b}{x}$ برابر صفر و ۴ باشد. ‏ ۱/۵ نمره

۵ـ مشتق تابع $f(x)=\frac{1}{3}(\mathrm{Arc}\sin 3x)^3$ را در نقطه‌ای به طول $x=\frac{1}{6}$ حساب کنید. ۱ نمره

۶ـ اولاً ـ مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^3+4}{x^2}$.

ثانیاً ـ مساحت سطح محصور بین این منحنی و مجانب مایل آن را در فاصلهٔ $x=1$ تا $x=b>1$ حساب کنید و حد این مساحت را وقتی $b\to+\infty$ است تعیین کنید $(\sqrt[3]{4}=1/6)$

۳ نمره

۷ـ مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش یکی از دو تابع ذیل:

الف) $y=x+\sqrt{8-x^2}$ ‏ ب) $y=\frac{2\cos x-1}{\cos x}$ $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$

۲/۵ نمره

۸ـ معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+kx^2+4=0$ مفروض است.

اولاً ـ در تعداد و علامت ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ سوم بحث کنید.

ثانیاً ـ هرگاه α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم فوق فرض شوند، k را چنان تعیین کنید که داشته باشیم $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\gamma$ ‏ ۳ نمره

۹ـ سطح محصور بین منحنی $y=\frac{1}{\cos x}$ ومحور x ها و دوخط $x=\frac{\pi}{6}$ و $x=\frac{\pi}{3}$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم حجم حادث را حساب کنید. ۱ نمره

۱۰ـ مطلوب است محاسبهٔ یکی از انتگرالهای زیر:

$$I=\int x(x-1)^{100}\,dx \qquad j=\int\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{tg x}}$$

۱ نمره

۱۱ـ می‌خواهیم یك قوطی به صورت استوانهٔ قائم بسازیم که حجم ثابتی داشته و مساحت کل آن کمترین مقدار ممکن باشد. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را برحسب حجم ثابت V حساب کنید (از ضخامت فلز مصرفی صرفنظر می‌شود) ۲ نمره

تست جبر و آنالیز

تستهایی که دراینجا ملاحظه می‌کنید ازمیان سؤالات ریاضی سالهای مختلف آزمون سراسری دانشگاههای کشور انتخاب شده است و هدف این است که دانش‌آموزان عزیز با پاسخ به این تستها، تا حدودی با نمونه سؤالات تستی و طریق حل آنها آشنا شوند. در آخر این مبحث کلید تست‌ها نیز ارائه شده است.

۱- تابع اولیه، تابع $y=\frac{\sin x}{\cos^۲ x}-\frac{\cos x}{\sin^۲ x}$ عبارتست از:

(۱) $\frac{۲\sin x-۲\cos x}{\cos ۲x}+C$ (۲) $\frac{۲\sin x+۲\cos x}{\cos ۲x}+C$

(۳) $\frac{۲\sin x-۲\cos x}{\sin ۲x}+C$ (۴) $\frac{۲\sin x+۲\cos x}{\sin ۲x}+C$

۲- منحنی نمایش $x^۲-y^۲+۲x+۲y=۰$ عبارت است از:

(۱) یك دایره (۲) یك هذلولی

(۳) دو خط موازی باهم (۴) دوخط عمود بر یکدیگر

۳- خط $y=\frac{x}{۱۰}$ منحنی نمایش تابع $y=\sin x$ را درچند نقطه قطع می‌کند؟

(۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۷ (۴) ۹

۴- منحنی نمایش تابع $y=\frac{\cos x}{۳x+\cos x}$ چند مجانب دارد؟

(۱) یك (۲) دو (۳) سه (۴) هیچ

۵- وقتی x تغییر می‌کند بزرگترین مقدار $a\sin x+b\cos x$ برابر است با:

(۱) $|a+b|$ (۲) $|a-b|$

(۳) $|a|+|b|$ (۴) $\sqrt{a^۲+b^۲}$

۶- مساحت سطح محصور بین منحنی های $y=\sin^۲ x$ و $y=\cos^۲ x$ در فاصله $\left(\frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{۳\pi}{۴}\right)$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) $\frac{۱}{۲}$ (۳) π (۴) $\frac{\pi}{۴}$

۷- مکان هندسی نقطهٔ M به مختصات $x=\frac{۱+t}{۱-t}$ و $y=۱-\frac{۲t}{۱+t}$ وقتی t تغییر کند یك منحنی است مختصات مرکز تقارن این منحنی کدام است؟

(۱) (۱ و ۱−) (۲) (۱ و ۰)

(۳) (۰ و ۱) (۴) (۰ و ۰)

۸- اگر $F(x)$ یکی از توابع اولیهٔ $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^۲+۱}}$ باشد، $F(\sqrt{۳})-F(۰)$ برابر است با:

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۹- سطح محصور بین منحنی $y=\cos x-\sin x$ و محور ox و محور oy واقع درسمت راست oy را حول محور ox دوران میدهیم، حجم حاصل برابر است با:

(۱) $\frac{\pi}{۴}(\pi+۲)$ (۲) $\frac{\pi}{۴}(\pi-۱)$

(۳) $\frac{\pi}{۴}(\pi+۱)$ (۴) $\frac{\pi}{۴}(\pi-۲)$

۱۰- منحنی $y=\frac{x^۳+۲}{x^۲-۱}$ چند مجانب دارد؟

(۱) هیچ (۲) یك (۳) دو (۴) سه

۱۱- محور تقارن منحنی $y^۲=x^۳+۱$ کدام خط است؟

(۱) $x=-۱$ (۲) $y=۱$

(۳) محور xها (۴) محور yها

۱۲- مکان هندسی نقطهٔ $M\left(x=\frac{۱}{\cos\alpha}\ \text{و}\ y=tg\alpha\right)$ وقتی α تغییر کند کدام است؟

(۱) سهمی (۲) بیضی (۳) دایره (۴) هذلولی

۱۳- اگر $F(x)$ تابع اولیه $f(x)=۵x\sqrt{x}$ باشد $F(۲)-F(۰)$ برابر است با:

(۱) $۵۰\sqrt{۲}$ (۲) $۸\sqrt{۲}$

(۳) $۲۰\sqrt{۲}$ (۴) $۴\sqrt{۲}$

۱۴- تابع اولیه (انتگرال نامعین) کسر $\frac{\cos x+\sin x}{۱-\sin ۲x}$ برابر است با:

(۱) $\frac{-۱}{\sin x-\cos x}+C$ (۲) $\frac{۱}{\sin x-\cos x}+C$

(۳) $\frac{۱}{\cos x+\sin x}+C$ (۴) $\frac{-۱}{\sin x+\cos x}+C$

۱۵- تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}-۱ & (x<۱)\\ ۰ & (x\geqslant۱)\end{cases}$ و تابع g با ضابطهٔ $g(x)=\begin{cases}۳ & (x<۱)\\ ۲ & (x\geqslant۱)\end{cases}$

مفروضند کدامیك از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) $\lim\limits_{x\to۱^+}(f+g)(x)=۱$ (۲) $f+g$ در $x=۱$ پیوسته نیست

(۳) $f+g$ در $x=۱$ پیوسته است (۴) $\lim\limits_{x\to۱^-}(f+g)(x)=۱$

۱۶- اگر تابع f در مجموعه اعداد حقیقی بـوسیلهٔ $f(x)=\begin{cases}(x-1)^4 & (x\geqslant 1)\\ 4 & (x<1)\end{cases}$

تعریف شده باشد این تابع در نقطهٔ $x=1$:

(۱) نه مشتق راست دارد و نه مشتق چپ

(۲) مشتق چپ دارد ولی مشتق راست ندارد

(۳) مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد

(۴) هم مشتق راست دارد و هم مشتق چپ

۱۷- کدامیك از معادلات زیر می‌تواند سه ریشه حقیقی و مثبت داشته باشد؟

(۱) $ax^3+bx^2+c=0$ (۲) $ax^4+bx^2+cx+d=0$

(۳) $a^2x^3+bx^2+cx+d^2=0$ (۴) $a^2x^3+b^2x^2+cx+d=0$

۱۸- مقدار عبـارت $(\mathrm{arctg}\,x^2+5x)'+3(\mathrm{arccotg}\,x^2+5x)'$ بـه ازاء $x=1$

برابر است با:

(۱) $\frac{-14}{37}$ (۲) $\frac{14}{37}$ (۳) صفر (۴) ۱۸

۱۹- اگر $f(x)=[\,x\,]+[-x]$ باشد آنگاه:

(۱) $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)<0$ (۲) $\forall x\in R-Z\quad f(x)\leqslant 0$

(۳) $\forall x\in Z\quad f(x)>0$ (۴) $\forall x\in R-Z\quad f(x)<0$

۲۰- تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-8 & (x<2)\\ a & x=2\\ x+3b & (x>2)\end{cases}$ مفروض است. اگر این‌تابع درنقطهٔ

$x=2$ پیوسته باشد a و b کدامند؟

(۱) $a=0 \,،\, b=-\frac{2}{3}$ (۲) $a=0 \,،\, b=\frac{2}{3}$

(۳) $a=2 \,،\, b=-\frac{2}{3}$ (۴) هیچکدام

۲۱- تابع معکوس $y=\sin(\cos x)$ کدام است؟

(۱) $\mathrm{Arc}\cos\mathrm{Arc}\sin y$ (۲) $\mathrm{Arc}\sin\cos x$

(۳) $\mathrm{Arc}\cos\cos x$ (۴) $\mathrm{Arc}\sin\mathrm{Arc}\cos y$

۲۲- a و b کدام باشند تا تابع $y=ax+۲\pm\sqrt{bx^۲+۲x-۳}$ مجانب نداشته باشد؟

(۱) $b=-۱$ و $a=۰$ (۲) $b=۱$ و $a=-۱$

(۳) $b=۱$ و $a=۲$ (۴) هیچکدام

۲۳- اگر تابع اولیه $F(x)$ برابر $۵x^۲-\sin x$ باشد مشتق $f(\cos x)$ برابراست با:

(۱) $\sin x\cos\cos x-۱۰\sin x$ (۲) $-(\sin x\sin\cos x+۱۰\sin x)$

(۳) $\sin x\cos\cos x-۱۰\sin x$ (۴) $\sin x\cos\sin x+۱۰\sin x$

۲۴- $\int\frac{\cos ۲x}{۱+\cos ۲x}dx$ کدام است؟

(۱) $x-\frac{۱}{۲}tg x+c$ (۲) $x-tg x+c$

(۳) $x+tg x+c$ (۴) (هیچکدام)

۲۵- حجم حاصل ازدوران سطح محدود به سهمی $y^۲-۲x+۳=۰$ و محور xها و دوخط $x=۲$ و $x=۳$ حول محور xها:

(۱) ۲π (۲) ۳π (۳) $\frac{۳\pi}{۲}$ (۴) $\frac{\pi}{۲}$

۲۶- سطح‌محصور بین سهمی‌های $y^۲=۲px$ و $x^۲=۲py$ کدام است؟

(۱) $\frac{۴p^۲}{۳}$ (۲) $\frac{۸}{۳}p^۲$ (۳) $\frac{۲}{۳}p^۲$ (۴) هیچکدام

۲۷- تابع $y=۵x^۲-۳x-۱$ طوری تعریف شده که در دامنه تعریف معکوس پذیر است دامنه تعریف کدام است؟

(۱) $[۰/۳$ و $+\infty[$ (۲) $[-۰/۳$ و $+\infty[$

(۳) $\mathcal{R}$ (۴) $\left[\frac{۳-\sqrt{۲۹}}{۱۰}, \frac{۳+\sqrt{۲۹}}{۱۰}\right]$

۲۸- کدامیك از توابع زیر دامنه‌اش $R-\{۵\}$ و برد آن $\mathcal{R}$ است:

(۱) $y=\frac{۳x+۴}{۳x-۱۵}$ (۲) $y=\frac{۲x^۳-۴x^۲+x+۱}{x^۲-۶x+۵}$

(۳) $y=\sqrt{\frac{x^۲-۴}{x-۵}}$ (۴) هیچکدام

۲۹- قرینه منحنی $y=\frac{۳x-۱}{۲x+۱}$ نسبت به نقطهٔ (۲ و ۵) کدام است؟

(۱) $y=\frac{3x+1}{2x-1}$ (۲) $y=\frac{55-5x}{21-2x}$

(۳) $y=\frac{15x-1}{4x+2}$ (۴) هیچکدام

۳۰- کدامیك از تابعهای زیر مجانب افقی دارند؟

(۱) $y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x-2}$ (۲) $y=x+\frac{x}{x-1}$

(۳) $y=x+\sqrt{x}$ (۴) $y=2x+\sqrt{4x^2-1}$

۳۱- بازاء چه مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x^3-1} & (x\neq 1)\\ a & (x=1)\end{cases}$ در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است؟

(۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) صفر

۳۲- حاصل $\int (x^2+1)^3 \cdot x \cdot dx$ برابر است با:

(۱) $\frac{x^2(x^2+1)^4}{4}+c$ (۲) $\frac{(x^2+1)^4}{4}+c$

(۳) $2x(x^2+1)^2+c$ (۴) $\frac{(x^2+1)^4}{8}+c$

۳۳- اگر $2\cos\alpha=x+\frac{1}{x}$ باشد آنگاه $2\cos 3\alpha$ برابر است با:

(۱) $x^3+\frac{1}{x^3}$ (۲) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$

(۳) $x^3-\frac{1}{x^3}$ (۴) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3$

۳۴- مجانب قائم تابع $y=2tg\frac{2}{3}x-1$ در فاصلهٔ $(0, \pi)$ کدامیك ازخطوط ذیل‌اند؟

(۱) $x=\frac{\pi}{3}$ (۲) $x=\frac{\pi}{2}$

(۳) $x=\frac{2}{3}\pi$ (۴) $x=\frac{3}{4}\pi$

۳۵- تابع $y=\frac{1-\sin x}{2\sin x-1}$ دارای چند مجانب می‌باشد؟ $(0<x<\pi)$

(۱) یك (۲) دو (۳) سه (۴) مجانب ندارد

۳۶- جواب $\int \sin^2 3x dx$ برابر است با:

(۱) $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}\sin 6x\right)+c$ (۲) $\frac{1}{6}\left(x+\frac{1}{4}\sin 3x\right)+c$

(۳) $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}\cos 6x\right)+c$ (۴) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\cos^2 3x\right)+c$

۳۷- جواب $\int x \cdot \cos x \cdot dx$ کدام است؟

(۱) $x\sin x+\cos x+c$ (۲) $\frac{1}{2}x\sin x+\cos x+c$

(۳) $-x\sin x\cos x+c$ (۴) $x\sin x-x\cos x+c$

۳۸- نقطه M به مختصات $x=\frac{2\sin t-4\cos t}{\sin t}$ و $y=tg\,t+1$ مفروض است اگر t تغییر کند مکان هندسی M کدامیك از منحنی‌های زیر است؟

(۱) $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ (۲) $(x-1)(y-2)+4=0$

(۳) $(x-2)(y-1)+4=0$ (۴) $4x^2+y^2=1$

۳۹- معادله مجانبهای منحنی $y=x+1\pm\sqrt{4x^2-8x+1}$ کدام است؟

(۱) $y=2x+3$ و $y-2x=1$ (۲) $y=-x+3$ و $y=3x-1$

(۳) $y=x+1$ (۴) $y=-x+3$

۴۰- بفرض اینکه $b^2<3$ باشد معادلهٔ $3x^4+4bx^3+5x^2+1=0$ چند جواب دارد؟

(۱) هیچ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۱

۴۱- تابع $f(x)=\begin{cases} x & (0\leqslant x<1) \\ 1-x & (1\leqslant x\leqslant 2) \end{cases}$ مفروض است کدامیك از مفاهیم زیر غلط است؟

(۱) در $x=0$ پیوسته نیست

(۲) در $x=1$ پیوسته نیست

(۳) در تمام فاصلهٔ [۲ و ۰] پیوسته است

(۴) در $x=2$ پیوسته نیست.

۴۲- جوابهای معادله $x^3+2x^2-x-2=0$ را x_1، x_2 و x_3 می‌نامیم مقدار

$\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_1x_3}$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) -1 (۴) $-\frac{1}{2}$

۴۳- کدامیك از منحنی‌های زیرفقط یك محور تقارن مایل دارد؟

(۱) $y=x\pm\sqrt{x}$ (۲) $y=x^2-4x$

(۳) $y=\frac{x^2-4}{3x^2-1}$ (۴) $y=x\pm\sqrt{3x^2-x}$

۴۴- سطح محصور بین منحنی به معادلهٔ $x^2y=4$ و محور xها و خطوط $x=2$ و $x=4$ برابر است با:

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۵- تابع $y=\frac{|x|+1}{x}$ دارای کدامیك از خواص زیر است؟

(۱) یك مجانب دارد (۲) دومجانب دارد

(۳) سه مجانب دارد (۴) مجانب ندارد

۴۶- نمایش هندسی کدامیك از توابع زیر فقط یك نقطه عطف دارد؟

(۱) $y=\frac{x^2}{x^2+1}$ (۲) $y=\frac{x^2-1}{x-4}$

(۳) $y=\frac{x}{2(x-1)}$ (۴) $y=\frac{x}{x^2+1}$

۴۷- تابع $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ دارای چه وضعی است؟

(۱) دارای حد راست است (۲) پیوسته است

(۳) دارای حد چپ است (۴) دارای حد است

۴۸- کدامیك از خطوط زیر محور تقارن منحنی تابع $y=\frac{x-1}{x+1}$ می‌باشد؟

(۱) $y=x+2$ (۲) $y=x-2$

(۳) $y=-x+2$ (۴) $y=-x-2$

۴۹- سطح محصور بین سهمی به معادلهٔ $y=x^2$ و خطوط $x=0$ و $x=1$ برابر

است با:

(۱) $\frac{۱}{۳}$ (۲) $\frac{۱}{۲}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۵۰- تابع اولیه $f(x)=۱۸(۳x-۱)^۵+\frac{۳}{x^۴}$ برابراست با:

(۱) $F(x)=۱۸(۳x-۱)^۶+\frac{۱}{x^۳}+c$

(۲) $F(x)=(۳x-۱)^۶+\frac{۱}{x^۳}+c$

(۳) $F(x)=(۳x-۱)^۶-\frac{۱}{x^۳}+c$

(۴) $F(x)=۱۸(۳x-۱)^۶-\frac{۱}{x^۳}+c$

۵۱- مجانب تابع $y=\frac{\cos x}{۲\sin x-۱}$ درفاصلهٔ $\left(-\frac{\pi}{۲} \text{ و } +\frac{\pi}{۲}\right)$ کدامیك از خطوط ذیل است؟

(۱) $x=\frac{\pi}{۶}$ (۲) $x=-\frac{\pi}{۳}$

(۳) $x=-\frac{\pi}{۶}$ (۴) $x=\frac{\pi}{۳}$

۵۲- تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۳}$ در کدامیك از فواصل ذیل پیوسته است؟

(۱) $\left(\frac{۳}{۲} \text{ و } ۰\right)$ (۲) $\left(\frac{۳}{۲} \text{ و } -\frac{۳}{۲}\right)$

(۳) $\left(\frac{۳}{۲} \text{ و } -\infty\right)$ (۴) $\left(\frac{۳}{۲} \text{ و } +\infty\right)$

۵۳- کدام دو خط زیر مجانب منحنی $y=\sqrt{x^۲-۴x+۱}$ است؟

(۱) $y=-x$ ، $y=-x-۲$

(۲) $y=x-۲$ ، $y=x$

(۳) $y=-x+۲$ ، $y=x-۲$

(۴) $y=-x$ ، $y=x+۲$

۵۴- تابع $y=\sqrt{x^۲-x^۴}$ در مبدأ مختصات دارای کدامیك از خواص ذیل است؟

(۱) مینیموم دارد (۲) ماکزیمم دارد

(۳) مشتق پذیر است (۴) نقطه عطف دارد

۵۵- دیفرانسیل تـابع $\frac{x}{1+x^2}+\mathrm{Arctg}\,x$ برابر است با:

(۱) $\frac{2dx}{1+x^2}$ (۲) $\frac{2xdx}{(1+x^2)}$

(۳) $\frac{2dx}{(1+x^2)^2}$ (۴) $\frac{2xdx}{(1+x^2)^2}$

۵۶- ضریب زاویه خط قائم بر منحنی تابع $\begin{cases} x=1-2\sin\alpha \\ y=\cos\alpha-2 \end{cases}$ کـه در نقطه‌ای از آن $\alpha=\frac{\pi}{4}$ باشد کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) 2 (۴) -2

۵۷- مسـاحت سطح محصور بین منحنی تـابع $y=x^2-2x$ و محور x ها و خطوط $x=1$ و $x=4$ عبارتست از:

(۱) 6 (۲) $\frac{16}{3}$ (۳) $\frac{22}{3}$ (۴) $\frac{20}{3}$

۵۸- مینیموم تـابع $y=\dfrac{x^2-x+\frac{1}{4}}{x^2-x+1}$ کدام است؟

(۱) 1 (۲) -1 (۳) 0 (۴) $\frac{1}{2}$

۵۹- مختصات مرکز تقارن منحنی نمایش تابع $y=\dfrac{x^2+3x+2}{x-1}$ عبارتست از:

(۱) (۰ و ۱−) (۲) (۵ و ۱)

(۳) (۰ و ۲−) (۴) (۳ و ۲)

۶۰- حـاصلضرب مینیموم در ماکزیمم تابع $y=\dfrac{x^2+3x+1}{x^2+x+2}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{5}{7}$ (۲) $-\frac{7}{5}$ (۳) $\frac{7}{5}$ (۴) $\frac{5}{7}$

۶۱- مـکان هندسی اوسـاط وترهای حاصل از تلاقی خط $y=m$ با منحنی نمایش تابع $y=\dfrac{x^2+x}{x^2+2x+5}$ کدام است؟

(۱) $y=\frac{2x+1}{2x+2}$ (۲) $y=\frac{2x+2}{2x+1}$

(۳) $y=\frac{2x-2}{2x+2}$ (۴) $y=\frac{2x-1}{2x+2}$

۶۲- مختصات مرکز تقارن منحنی نمایش تابع $y=3x+1\pm\sqrt{x^2-4x+1}$ کدام است؟

(۱) (۱ و ۳) (۲) (۴ و ۲)

(۳) (۷ و ۲) (۴) (۳ و ۳)

۶۳- مجانب‌مایل منحنی‌نمایش تابع $y=\frac{x^2-2x}{2x+1}$ عبارتست از:

(۱) $y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$ (۲) $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$

(۳) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$ (۴) $y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{4}$

۶۴- منحنی نمایش تابع $y=\frac{x^2+2x+3}{2x^2+4x+2}$

(۱) دارای یك ماکزیمم و یك مینیموم است

(۲) دارای فقط یك ماکزیمم است

(۳) دارای فقط یك مینیموم است

(۴) ماکزیمم و مینیموم ندارد

۶۵- منحنی نمایش تابع $y=\frac{3x^2+6x+5}{x^2+2x+2}$

(۱) دارای یك نقطهٔ عطف است

(۲) فاقد نقطه عطف است

(۳) دارای دو نقطه عطف است

(۴) فاقد ماکزیمم یا مینیموم است

۶۶- مقدار مشتق تابع $y=\mathrm{Arc}\,tg\,cos\frac{x}{2}$ بازاء $x=60^\circ$ برابر است با:

(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $-\frac{1}{7}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۶۷- معادلهٔ مکان هندسی مرکز تقارن منحنی تابع $y=\frac{(m-1)x+3}{x-2m}$ عبارتست از:

(۱) $y=\frac{x}{۲}+۱$ (۲) $y=\frac{x}{۲}-۱$

(۳) $y=-\frac{x}{۲}+۱$ (۴) $y=۲x+۱$

۶۸- منحنی تابع $y=\frac{\sqrt{x^۲-۴}}{x-۱}$ دارای ...... است؟

(۱) دو مجانب افقی

(۲) دو مجانب افقی و یك مجانب قائم

(۳) یك مجانب قائم و یك مجانب افقی

(۴) یك مجانب مایل و یك مجانب قائم

۶۹- کدامیك ازمواردزیر درموردتابع F بر R با ضابطه $F(x)=\begin{cases}-x^۲ & (x\leqslant ۰)\\ x^۲-۱ & (x\geqslant ۱)\end{cases}$ صادق است.

(۱) تابع F روی D_F صعودی است

(۲) تابع F روی D_F نزولی است

(۳) تابع F روی D_F اکیداً صعودی است

(۴) تابع F روی D_F اکیداً نزولی است

۷۰- کدامیك از موارد زیر در مورد تابع $y=\frac{x^۲+۲x+۱}{x^۲+x+۱}$ برقرار است؟

(۱) تابع دارای یك ماکزیمم و یك مینیموم نسبی است

(۲) تابع فقط دارای یك مینیموم نسبی است

(۳) تابع ماکزیمم و مینیموم نسبی ندارد

(۴) تابع فقط دارای یك ماکزیمم نسبی است

۷۱- اگر $x_۱$ ، $x_۲$ و $x_۳$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۳-۳mx+۱=۰$ باشند و $x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲=۶$ باشد، m کدام است؟

(۱) -۳ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۳

۷۲- مقدار انتگرال $\int_۱^۲ \frac{x-۵}{۲\sqrt{x-۱}}dx$ کدام است؟

(۱) $-\frac{۱۱}{۳}$ (۲) $-\frac{۱۱}{۲}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{۱۳}{۳}$

۷۳- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x \cdot \sin\dfrac{1}{2x^2+1} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ تعریف شده است. این تابع در نقطهٔ $x=0$

(۱) پیوسته است

(۲) پیوسته نیست

(۳) فقط از چپ پیوسته است

(۴) فقط از راست پیوسته است

۷۴- به‌ازای کدام مقدار از a تابع $f(x)=a[x]+[x+1]$ درنقطهٔ $x=1$ دارای حد است؟

(۱) -2 (۲) -1 (۳) 1 (۴) 2

۷۵- بازاء کدام دومقدار n و m دو تابع $y=\sin 2x$ و $y=mx^n$ وقتی $x\to 0$ هم‌ارزند؟

(۱) $n=\frac{1}{2}$ و $m=1$ (۲) $n=2$ و $m=1$

(۳) $n=1$ و $m=2$ (۴) $n=1$ و $m=\frac{1}{2}$

۷۶- معادله یکی از مجانبهای منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2-5x}$ عبارتست از:

(۱) $y=2x-1$ (۲) $y=x-\frac{1}{2}$

(۳) $y=1$ (۴) $x=1$

۷۷- اگر α و β و γ ریشه‌های معادلهٔ $x^3-4x-1=0$ باشند معادله درجه‌سومی که ریشه‌هایش $2\alpha+\beta+\gamma$ و $2\beta+\gamma+\alpha$ و $2\gamma+\alpha+\beta$ باشند عبارت است از:

(۱) $x^3+4x-1=0$

(۲) $x^3-4x+1=0$

(۳) $x^3-4x-1=0$

(۴) $x^3+4x+1=0$

۷۸- a و b چقدر باشند تا نقطهٔ $(-3 \text{ و } -4)$ نقطهٔ ماکزیمم منحنی به معادلهٔ $y=\dfrac{x^2+ax+b}{x+1}$ باشد؟

(۱) $a=۲$ و $b=۵$ (۲) $a=۳$ و $b=۲$

(۳) $a=-۱$ و $b=-۴$ (۴) $a=-۲$ و $b=۰$

۷۹- حجم حـادث از دوران منحنی به معادلهٔ $x=\frac{۱}{y+۱}$ حول محور yها و محدود به دو خط $y=۰$ و $y=۳$ برابراست با:

(۱) $\frac{۳}{۴}\pi$، (۲) $\frac{۵}{۴}\pi$

(۳) $\frac{۴}{۳}\pi$ (۴) $\frac{۴}{۵}\pi$

۸۰- عرض نقطه ماکزیمم منحنی به معادلهٔ $y=\sqrt{۳}\sin x-\cos x$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{۳}-۱$ (۴) $\sqrt{۳}+۱$

۸۱- تعریف $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ کدام است؟

(۱) $\forall N>۰\ \exists M>۰\ [x<-N\Rightarrow f(x)<-M]$

(۲) $\exists M>۰\ \forall N>۰\ [x<-N\Rightarrow f(x)<-M]$

(۳) $\exists N>۰\ \forall M>۰\ [x<-N\Rightarrow f(x)<-M]$

(۴) $\forall M>۰\ \exists N>۰\ [x<-N\Rightarrow f(x)<-M]$

۸۲- کدام یك از گـزاره‌های زیر در مورد منحنی $x^۲+y^۲-xy-۱=۰$ درست است؟

(۱) مجانب ندارد

(۲) حداقل یك مجانب مایل دارد

(۳) حداقل یك مجانب افقی دارد

(۴) حداقل یك مجانب قائم دارد

۸۳- مکعب فلزی به ضلع ۱۰ را حـرارت داده‌ایم ضلع آن به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۱۰}$ بـزرگ شده است. مقدار تقریبی کمتراز واحد حجم حاصل، کدام است؟

(۱) ۱۰۴۰ (۲) ۱۰۲۰ (۳) ۱۰۱۰ (۴) ۱۰۳۰

۸۴- سطح محصور بین منحنی‌های $x=y^۲$ و $y=x^۲$ کدامیك از اعداد زیر است؟

(۱) $\frac{۴}{۳}$ (۲) $\frac{۵}{۳}$ (۳) $\frac{۲}{۳}$ (۴) $\frac{۱}{۳}$

۸۵- اگر $\forall x\in\mathbb{R}$ ، $f(x)=|x^۲-۲x|$ مشتق راست f درنقطهٔ $x=۲$ کدام‌است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

۸۶- فرض‌کنید که f تابعی باشد به طوریکه به ازای هر x و y از R ، $f(x+y)=f(x)+f(y)$ اگر n عدد طبیعی باشد و $f(۱)\neq ۰$ آنگاه $\frac{f(n)}{f(۱)}$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{n^۲}$ (۲) $\frac{۱}{n}$ (۳) n (۴) $n^۲$

۸۷- مقدار $\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} [x]\cos x dx$ کدام است؟

(۱) $۱-\frac{۱}{۲}\sin ۱$ (۲) $۱-\sin ۱$

(۳) $۱+\frac{۱}{۲}\sin ۱$ (۴) $۱+\sin ۱$

۸۸- اگر به ازاء هر x حقیقی $fx(x)=|۱-\cos^۳ x|$ ، $f'\left(\frac{\pi}{۴}\right)$ کدام است؟

(۱) $-۳\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ (۲) $-۳\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

(۳) $۳\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ (۴) $۳\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۸۹- معادلهٔ $x\sin x-۱=۰$ در فاصلهٔ $[۰ \text{ و } ۲\pi]$ چند ریشه دارد؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۹۰- اگر مجانب منحنی به معادلهٔ $y=۲x+\sqrt{x^۲-۲ax}$ وقتی که $x\to+\infty$ به‌صورت $y=۳x-۵$ باشد در این‌صورت مقدار a برابر است با:

(۱) $-\frac{۵}{۲}$ (۲) -۵ (۳) $\frac{۵}{۲}$ (۴) ۵

۹۱- معادلهٔ $x^۳-۳x-m-۲=۰$ بازاء‌کدام یك از مقادیرزیر دارای ریشه‌مضاعف منفی است؟

(۱) $+۴$ (۲) صفر (۳) -۲ (۴) -۴

۹۲- تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+a & (x>۲)\\ ۴ & (x=۲)\\ ۲[x]+bx & (x<۲)\end{cases}$ در نقطه $x_۰=۲$ پیوسته است a و b

کدامند؟

(۱) $a=2$ ، $b=1$

(۲) $a=2$ ، $b=2$

(۳) $a=2$ ، $b=-2$

(۴) $a=1$ ، $b=2$

۹۳- به‌فرض‌اینکه t از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند و $M\left(x=\frac{t+2}{t^3-t}\ \text{و}\ y=\frac{t}{1+t}\right)$ باشد، $y=f(x)$ چند خط مجانب دارد؟

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) هیچکدام

۹۴- اگر $y=(\sqrt{x}-\sqrt{x-a})^m$ ، $z=(\sqrt{x}+\sqrt{x-a})^m$ ، $a>0$ باشد حاصل $(y'z+z'y)$ کدام است؟

(۱) a^m (۲) a (۳) صفر (۴) هیچکدام

۹۵- برای تابع $y=\sqrt[3]{x^3-x^2}$ درنقطهٔ $x_0=0$ کدام یك از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) $x_0=0$ طول یك نقطه عادی است.

(۲) $x_0=0$ طول نقطه بازگشت است.

(۳) $x_0=0$ طول نقطه می‌نیموم نسبی است.

(۴) $x_0=0$ طول نقطهٔ عطف است.

۹۶- تابع اولیه تابع $f(x)=\frac{2x}{x+\sqrt{x^2+1}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}+C$

(۲) $\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}+C$

(۳) $\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$

(۴) $\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$

۹۷- سطح محصور بین منحنی $y=2tg x+2tg^3 x$ و محور xها و دوخط $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=-\frac{\pi}{3}$ برابر است با :

(۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) $2\sqrt{3}$

۹۸- اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ $x^5+4x^3-x^2+k=0$ برابر $2i$ و $i=\sqrt{-1}$ باشد مقدار k کدام است؟

(۱) ۴- (۲) ۴ (۳) ۲ (۴) ۲-

۹۹- یك منحنی از نقطه (۱,۱) می‌گذرد و $\frac{dy}{dx}=2xy^2$ است، معادله این منحنی کدام است؟

(۱) $y=\frac{1}{1+2x^2}$ (۲) $y=\frac{1}{2-x^2}$

(۳) $y=x^2-2$ (۴) $y=2-x^2$

۱۰۰- مساحت محصور بین منحنی $y=2\cos 3x$ و دومحور مختصات کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) π (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۰۱- عرض نقطهٔ ماکزیمم منحنی $y=\frac{x^2+ax+2}{x-1}$ برابر ۲- است، آنگاه a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۱- (۳) ۲ (۴) ۲-

۱۰۲- اگر x_1 ، x_2 و x_3 ریشه‌های معادله $x^3-3x+K+2=0$ و $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-12$ باشد، مقدار K کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۲- (۳) ۳ (۴) ۳-

۱۰۳- بازای کدام مقدار m و n دو تابع $f(x)=\mathrm{Arc}tg\,3x$ و mx^n وقتی $x\to 0$ هم‌ارزند؟

(۱) $m=3$ و $n=1$ (۲) $m=1$ و $n=3$

(۳) $m=3$ و $n=\frac{1}{2}$ (۴) $n=3$ و $m=\frac{1}{2}$

۱۰۴- بەازای چه مقدار a مجانب افقی منحنی $y=x-\sqrt{x^2-ax}$ برابر ۱ می‌گردد؟

(۱) ۱- (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

۱۰۵- کدام‌یك از نقاط زیر مرکز تقارن منحنی تابع $y=(x-1)+\frac{2}{x-3}$ است؟

(۱) (۱ و ۳) (۲) (۳ و ۱)

(۳) (۲ و ۳) (۴) (۳ و ۲)

۱۰۶- تابع f با دستور $f(x)=\begin{cases} x|x| & (x<0) \\ \sqrt{x} & (x\geqslant 0) \end{cases}$ تعریف شده است کدام یك از احکام زیر در مورد این تابع در نقطه $x_0=0$ درست است؟

(۱) مشتق چپ و مشتق راست ندارد.

(۲) مشتق دارد.

(۳) مشتق راست دارد ولی مشتق چپ ندارد.

(۴) مشتق چپ دارد ولی مشتق راست ندارد.

۱۰۷- مشتق معادلهٔ یك منحنی به صورت $\frac{dy}{dx}=\frac{-2x+2}{2y+3}$ ومنحنی‌ازنقطه(۲و۱) A می‌گذرد شکل منحنی بصورت:

(۱) دایره است. (۲) بیضی است.

(۳) هذلولی است. (۴) سهمی است.

۱۰۸- کدام‌یك ازاحکام زیر درمورد تابع f بر R با ضابطه $f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x\leqslant 0) \\ x^3-1 & (x\geqslant 1) \end{cases}$ صادق است؟

(۱) تابع f روی D_f صعودی است.

(۲) تابع f روی D_f اکیداً صعودی است.

(۳) تابع f روی D_f نزولی است.

(۴) تابع f روی D_f اکیداً نزولی است.

۱۰۹- تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2+b & (x>2) \\ 2x+1 & (x\leqslant 2) \end{cases}$ در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است a و b کدامند؟

(۱) $a=\frac{1}{2}$ ، $b=2$ (۲) $a=2$ ، $b=3$

$b=\frac{۱}{۳}$ ، $a=۲$ (۴) $b=۳$ ، $a=\frac{۱}{۲}$ (۳)

۱۱۰- مرکز تقارن منحنی $x^۲-xy+۳x+۴y=۰$ روی کدامیك از خطوط زیـر قرار دارد؟

$y=x+۷$ (۱) $y=x-۱$ (۲)

$x=۵$ (۳) $x+y=۱$ (۴)

۱۱۱- سطح محصور بین منـحنی $y=sin^۲x$ و خط $y=\frac{۲}{\pi}x$ کدامیك از اعداد زیـر است؟

$\frac{\pi}{۴}+\frac{۱}{۲}$ (۱) $\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}$ (۲)

$\frac{\pi}{۸}+\frac{۱}{۲}$ (۳) $-\frac{\pi}{۸}+\frac{۱}{۲}$ (۴)

۱۱۲- $f(x)=a[x+۲]+[-x]$ و $\lim\limits_{x\to۲} f(x)=۱$ آنگاه a کدام است؟

۰ (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴)

۱۱۳- حاصل $\int_{-۱}^{۱} x|x|dx$ کدام است؟

$\frac{۱}{۳}$ (۱) $\frac{۲}{۳}$ (۲) صفر (۳) ۲ (۴)

۱۱۴- ضریب زاویهٔ مماس برمنحنی $y=x+Arctgy$ در نقطه‌ای بعـرض یك واقع برآن کدام است؟

۲ (۱) $\frac{۳}{۲}$ (۲)

-۲ (۳) $-\frac{۱}{۲}$ (۴)

۱۱۵- اگر $\int f(x)dx=x^۲+۳$ باشد مشتق $f(sinx)$ کدام است؟

$۲cosx$ (۱) $sin۲x$ (۲)

$\frac{۱}{۲}sin۲x$ (۳) $۲cos۲x$ (۴)

۱۱۶- حاصل $\int \frac{dx}{\sqrt{۲x-x^۲}}$ کدام است؟

$\mathrm{Arc}\sin(x+۱)+c$ (۱)

$\mathrm{Arc}\sin(x-۲)+c$ (۲)

$\mathrm{Arc}\cos(x-۱)+c$ (۳)

$\mathrm{Arc}\sin(x-۱)+c$ (۴)

۱۱۷- سطح محصور بین منحنی $y=x^۲$ و خط $y=۱$ را حول محور xها دوران میدهیم حجم جسم حاصل کدام است؟

(۱) $\frac{۸\pi}{۵}$ (۲) $\frac{۷\pi}{۵}$ (۳) $\frac{۴\pi}{۵}$ (۴) $\frac{۳\pi}{۵}$

۱۱۸- اگر $f'(x)=\frac{x^۲+۱}{x+۱}$ و $g'(x)=\frac{-۴}{x+۱}$ باشد $۲f(x)+g(x)$ کدام است؟

(۱) $۲x^۲+x+c$ (۲) $x^۲-۲x+c$

(۳) $x^۲-x+c$ (۴) $۲x^۲-x+c$

۱۱۹- برد تابع $f(x)=۲\mathrm{Arc}tg\frac{x^۲}{۲}$ کدام است؟

(۱) $[۰ , \pi[$ (۲) $]۰ , \pi[$

(۳) $]۰ , ۲\pi[$ (۴) $]۰ , \frac{\pi}{۲}[$

۱۲۰- نقطهٔ تلاقی مجانبهای $y=\frac{x^۲+x+۱}{x-۱}$ کدام است؟

(۱) $(۱ , -۱)$ (۲) $(۱ , ۱)$

(۳) $(۱ , ۲)$ (۴) $(۱ , ۳)$

۱۲۱- مساحت سطح محصور بین منحنی $y=\frac{۲x}{\sqrt{x^۲+۱}+x}$ و محور x ها و خطوط $x=۰$ و $x=۱$ کدام است؟

(۱) $\frac{۴\sqrt{۲}-۴}{۳}$ (۲) $\frac{۴\sqrt{۲}-۱}{۳}$

(۳) $\frac{\sqrt{۲}-۱}{۳}$ (۴) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۳}$

۱۲۲- تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{(x+۲)|x-۱|}{x-۱} & (x\neq۱)\\ ۳ & (x=۱)\end{cases}$ مفروض است این تابع درنقطهٔ

$:x=۱$

(۱) پیوسته است.

(۲) پیوستگی راست دارد.

(۳) پیوستگی چپ دارد.

(۴) هیچکدام

۱۲۳- مقدار $\int_{۲}^{۳} \frac{۳(x+۳)}{\sqrt{x-۲}}dx$ کدام است؟

(۱) ۲۱ (۲) ۳۰ (۳) ۳۲ (۴) ۱۵

۱۲۴- سطح محصور بین دو منحنی $y=x^۲-۲$ و $y=-x^۲$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) $\frac{۸}{۳}$ (۳) $\frac{۱۰}{۳}$ (۴) ۴

۱۲۵- در ظرفی بشکل کره که شعاع آن $۱۰cm$ است تا ارتفاع ۹ سانتیمتر آب ریخته‌ایم حجم آب کدام است؟

(۱) ۱۰۰۰π (۲) ۷۵۶π

(۳) ۴۵۲π (۴) ۵۶۷π

۱۲۶- تعداد مجانبهای تابع $y=\frac{۱-tgx}{۱+۲sinx}$ در فاصله $[۰ \ , \ ۲\pi]$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۱

۱۲۷- اگر $\int f(x)dx=x^۲+x$ باشد، $\int(۳f(x)+۲x)dx$ کدام است؟

(۱) $۴x^۲+۳x+c$ (۲) $۳x^۲+۲x+c$

(۳) $\frac{۲}{۳}x^۳+x^۲+c$ (۴) $x^۳+x^۲+c$

۱۲۸- معادلهٔ $x^۴+۳۲x+۷K+۶=۰$ را که در آن x مجهول و K پارامتر است در نظر می‌گیریم. اگر این معادله دارای ریشه مضاعف باشد مقدار K برابر است با:

(۱) ۶ (۲) -۸

(۳) $-\frac{۶}{۷}$ (۴) K هرچه باشد معادله ریشه مضاعف ندارد.

۱۲۹- بازای چه مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases} a[x]+|x-۱| & (x\neq۲) \\ ۵ & (x=۲) \end{cases}$ در نقطه‌ای

بطول ۲ پیوستگی از راست دارد؟

(۱) $a=۱$ (۲) $a=۲$

(۳) $a=۳$ (۴) $a=۴$

۱۳۰- ماکزیمم عبارت $y=\frac{-x^{۲}+۲x-۱}{۲x^{۲}+۱}$ برابر است با:

(۱) ۱ (۲) -۱

(۳) $-\frac{۱}{۲}$ (۴) صفر

۱۳۱- سطح محصور بین منحنی بـه معـادلهٔ $y=\operatorname{Arcsin}x$ و محور y هـا و دوخط $y=۰$ و $y=\frac{\pi}{۲}$ را حول محور y ها دوران میدهیم حجم حادث برابر است با:

(۱) $\pi^{۲}$ (۲) $\frac{\pi^{۲}}{۲}$

(۳) $\frac{\pi^{۲}}{۳}$ (۴) $\frac{\pi^{۲}}{۴}$

۱۳۲- مقدار $\lim_{x\to ۰^{+}}\frac{[۵x^{۲}]}{x+۵}$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۰

(۳) ۱ (۴) $\frac{۱}{۵}$

۱۳۳- فرض کنیم تابع $R\xrightarrow{f}R$ روی R مشتق‌پذیر از مرتبهٔ دوم باشد و $\forall x\in\mathcal{R}$ ، $h(x)=f(۱-۴x^{۲})$ و $f'(۱)=۱$ مقدار $h''(۰)$ کدام است؟

(۱) -۱۶ (۲) -۸ (۳) ۸ (۴) ۱۶

۱۳۴- مشتق چپ تـابع $\forall x\in\mathcal{R}$ $f(x)=|۲x+۱|-|x-۱|$ در نقطه $x=-\frac{۱}{۲}$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $-\frac{۱}{۲}$ (۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۳۵- رابطهٔ $x^{۵}+y^{۴}+x^{۲}y=۱$ را بطـور ضمنی برحسب y بیـان می‌کند $x'(۰)$ کدام است؟

(۱) -۵ (۲) $-\frac{۱}{۵}$ (۳) $\frac{۱}{۵}$ (۴) ۵

۱۳۶- مقدار $\int_{-1}^{1} \left|x+|x|\right| dx$ کدام است؟

(۱) ۳   (۲) ۱   (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۳۷- اندازهٔ حجم حاصل از دوران سطح محصور بین منحنی $y=x^2$ و خط $y=x$ حول محور x کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{15}$ (۲) $\frac{2\pi}{15}$ (۱) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$

۱۳۸- فرض کنیم $\forall t\in\mathcal{R}$ $S(t)=\int_{-1}^{t}\frac{dx}{1+x^{10}}$ در اینصورت $S'(0)$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) -2 (۳) ۱   (۴) ۲

۱۳۹- f تابعی است حقیقی بادامنهٔ $\mathcal{R}$ و $|f|\leqslant 2$ که در هیچ‌نقطه دارای حد نیست. تابع $(1-x^2)f(x)$ دقیقاً درچند نقطه دارای حدیست حقیقی:

(۱) ۱   (۲) ۲   (۳) ۳   (۴) ۴

۱۴۰- حاصل انتگرال $\int\frac{dx}{\cos^2x\cdot\sqrt{1+tgx}}$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{1}{\cos x}+tgx+c$ (۲) $\frac{1}{\cos x}+cotgx+c$

(۳) $2\sqrt{1+tgx}+c$ (۴) $2(1+tgx)+c$

۱۴۱- حد تابع $f(x)=x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{\sin x}{x^2+3x}$ را وقتی‌که $x\longrightarrow 0^+$ کدام است؟

(۱) ۰   (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

۱۴۲- معادلهٔ $4x^4+x^3-3x^2-x-1=0$ چند ریشهٔ گویا دارد؟

(۱) ۰   (۲) ۱   (۳) ۲   (۴) ۴

۱۴۳- معادلهٔ بیضی که مرکز آن $c(-2$ و $3)$، محور کانونی آن موازی محور x ها، طول قطر بزرگ آن ۱۰ و فاصلهٔ کانونی آن ۸ باشد، کدام است؟

(۱) $\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

$$\frac{(x+۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y-۳)^۲}{۹}=۱ \quad (۲)$$

$$\frac{(x+۲)^۲}{۲۵}+\frac{(y-۳)^۲}{۱۶}=۱ \quad (۳)$$

$$\frac{(x+۲)^۲}{۹}+\frac{(y-۳)^۲}{۱۶}=۱ \quad (۴)$$

۱۴۴- معادلهٔ دایره‌ای که مرکزش C(۱ و ۰) و بر دایرهٔ به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴x-۶y-۳=۰$ مماس باشد، کدام است؟

(۱) $x^۲+y^۲-۲y-۱۱+۸\sqrt{۲}=۰$

(۲) $x^۲+y^۲-۲y-۲۳+۱۶\sqrt{۲}=۰$

(۳) $x^۲+y^۲+۲y+۱۱+۸\sqrt{۲}=۰$

(۴) $x^۲+y^۲+۲y+۲۳+۱۶\sqrt{۲}=۰$

۱۴۵- مختصات کانون سهمی $y^۲-۲y-۲x-۳=۰$ کدام است؟

(۱) (۱ و ۲-) (۲) (۱ و $-\frac{۳}{۲}$)

(۳) (۱ و $\frac{۳}{۲}$) (۴) (۱ و ۳)

۱۴۶- دورهٔ تناوب تابع $y=\cot g۲x-\cos^۲ ۲x$ کدام است؟

(۱) π (۲) ۲π (۳) $\frac{\pi}{۲}$ (۴) $\frac{\pi}{۴}$

۱۴۷- مساحت سطح محصور بین منحنی به معادلهٔ $y=۳x^۲+۶x+۳$ و محور xها و خطوط $x=۰$ و $x=\alpha$ $(\alpha>۰)$ برابر ۲۶ است، مقدار α کدام است؟

(۱) $\frac{۵}{۲}$ (۲) $\frac{۳}{۲}$ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۴۸- انتگرال تابع $y=۳\cos x\sqrt{\sin x}-۴\sqrt[۳]{x}$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{\cos^۳ x}-۳x^{\frac{۴}{۳}}+c$ (۲) $۲\sqrt{\cos^۳ x}-۳x^{\frac{۴}{۳}}+c$

(۳) $\sqrt{\sin^۳ x}-\frac{۳}{۲}x^{\frac{۴}{۳}}+c$ (۴) $۲\sqrt{\sin^۳ x}-۳x^{\frac{۴}{۳}}+c$

۱۴۹- اگر به‌ازاء هر x که $|x-۱|<\delta$ آنگاه $\left|\frac{۲x^۲+x}{x}-۳\right|<\frac{۱}{۵}$ و در این صورت مقدار δ کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۱۰}$ (۲) $\frac{۱}{۸}$ (۳) $\frac{۱}{۴}$ (۴) $\frac{۲}{۵}$

۱۵۰- مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases}-\sqrt{-x^۲+۱۶} & (|x|\leqslant ۴)\\ x-۴ & (|x|>۴)\end{cases}$ کدام است؟

(۱) $\{-۴\}$ (۲) $\{۴\}$

(۳) $\{-۴ ، ۴\}$ (۴) ϕ

۱۵۱- $\lim\limits_{x\to ۱}([x]-۱)[x]$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۰ (۴) ۱

۱۵۲- دورهٔ تناوب تابع $y=f(x)=۲x-[۲x]$ برابر کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{۳}{۲}$ (۴) ۲

۱۵۳- تابع $f(x)=|x-۱|+\frac{۱}{x}$ دارای چند مجانب است؟

(۱) ۳ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) مجانب ندارد.

۱۵۴- حاصل $\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۳\sin x-\sin ۳x}{۱+\cos x}dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{۳}{۲}$ (۴) ۲

۱۵۵- مساحت ناحیه محصور بین منحنی‌های به معادلات $y=x^۲$ و $y=-x^۲+۴x$ چقدر است؟

(۱) $\frac{۵}{۳}$ (۲) $\frac{۸}{۳}$ (۳) $\frac{۷}{۲}$ (۴) $\frac{۱۱}{۲}$

۱۵۶- هرگاه $u(x)=\int_{-x}^{x}\cos t\,dt$ ، $u'(x)$ کدام است؟

(۱) $-\sin x$ (۲) $-\cos x$

(۳) $۲\sin x$ (۴) $۲\cos x$

۱۵۷- هرگاه $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(۱-\frac{۱}{x}\right)^x=\frac{۱}{e}$ ، مقدار $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^x$ کدام است؟

(۱) صفر　　(۲) e　　(۳) $۱+e$　　(۴) $+\infty$

۱۵۸- به‌ازاء چه مقدار m معادلهٔ $x^۲-۳x+(۱-m)=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف مثبت است؟

(۱) $m=-۱$　　(۲) $m=۰$

(۳) $m=۱$　　(۴) $m=۲$

۱۵۹- برد تابع $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{[x]} & (x<۰) \\ ۰ & (x\geqslant ۰) \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $]-\infty$ و $۰]$　　(۲) $[۱$ و $۰]$

(۳) $]۱$ و $۰]$　　(۴) $]+\infty$ و $۰]$

۱۶۰- نمایش هندسی معادلهٔ $۴x^۲-y^۲+۲y=۱$ کدام است؟

(۱) بیضی　　(۲) دایره

(۳) دوخط راست　　(۴) یك نقطه

جدول پاسخ تست جبر و آنالیز

۱-۴	۲۲-۱	۴۳-۱	۶۴-۳	۸۵-۴	۱۰۶-۴	۱۲۷-۱	۱۴۸-۴
۲-۴	۲۳-۲	۴۴-۳	۶۵-۳	۸۶-۳	۱۰۷-۱	۱۲۸-۱	۱۴۹-۱
۳-۳	۲۴-۱	۴۵-۳	۶۶-۳	۸۷-۲	۱۰۸-۱	۱۲۹-۲	۱۵۰-۱
۴-۱	۲۵-۱	۴۶-۲	۶۷-۲	۸۸-۳	۱۰۹-۳	۱۳۰-۴	۱۵۱-۳
۵-۴	۲۶-۱	۴۷-۴	۶۸-۱	۸۹-۳	۱۱۰-۱	۱۳۱-۴	۱۵۲-۱
۶-۲	۲۷-۱	۴۸-۱	۶۹-۱	۹۰-۴	۱۱۱-۴	۱۳۲-۲	۱۵۳-۱
۷-۴	۲۸-۴	۴۹-۱	۷۰-۱	۹۱-۲	۱۱۲-۲	۱۳۳-۲	۱۵۴-۴
۸-۴	۲۹-۲	۵۰-۳	۷۱-۳	۹۲-۱	۱۱۳-۳	۱۳۴-۱	۱۵۵-۲
۹-۴	۳۰-۴	۵۱-۱	۷۲-۱	۹۳-۲	۱۱۴-۱	۱۳۵-۲	۱۵۶-۴
۱۰-۴	۳۱-۳	۵۲-۴	۷۳-۱	۹۴-۳	۱۱۵-۱	۱۳۶-۲	۱۵۷-۲
۱۱-۳	۳۲-۴	۵۳-۳	۷۴-۲	۹۵-۲	۱۱۶-۴	۱۳۷-۲	۱۵۸-۱
۱۲-۴	۳۳-۱	۵۴-۱	۷۵-۳	۹۶-۳	۱۱۷-۱	۱۳۸-۳	۱۵۹-۲
۱۳-۲	۳۴-۴	۵۵-۳	۷۶-۱	۹۷-۱	۱۱۸-۲	۱۳۹-۲	۱۶۰-۳
۱۴-۱	۳۵-۲	۵۶-۴	۷۷-۳	۹۸-۱	۱۱۹-۱	۱۴۰-۳	
۱۵-۳	۳۶-۱	۵۷-۳	۷۸-۱	۹۹-۲	۱۲۰-۴	۱۴۱-۲	
۱۶-۳	۳۷-۱	۵۸-۳	۷۹-۱	۱۰۰-۴	۱۲۱-۱	۱۴۲-۳	
۱۷-۲	۳۸-۳	۵۹-۲	۸۰-۲	۱۰۱-۴	۱۲۲-۲	۱۴۳-۱	
۱۸-۴	۳۹-۲	۶۰-۱	۸۱-۴	۱۰۲-۱	۱۲۳-۳	۱۴۴-۲	
۱۹-۴	۴۰-۱	۶۱-۱	۸۲-۱	۱۰۳-۱	۱۲۴-۲	۱۴۵-۱	
۲۰-۱	۴۱-۲	۶۲-۳	۸۳-۴	۱۰۴-۴	۱۲۵-۴	۱۴۶-۳	
۲۱-۱	۴۲-۳	۶۳-۱	۸۴-۴	۱۰۵-۳	۱۲۶-۱	۱۴۷-۳	

قیمت در تمام کشور ۱۲۰۰ ریال

۱۳۷۵